NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Précis de Géométrie descriptive

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Librairie Delagrave

NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Précis de Géométrie descriptive

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Librairie Delagrave

BIBLIOTHÈQUE JUVENTA

(Romans, Nouvelles, Variétés)

Les ouvrages qui composent cette nouvelle collection sont choisis parmi ceux que préfère la jeunesse.

(Les titres précédés d'un astérisque conviennent surtout aux jeunes lecteurs)

Chaque volume (12×18,5) illustré, broché. 4.50
Relié toile pleine, rouge, fers spéciaux . . 8.50

---

* **Le Petit Lord,** par Burnett. (trad. E Dupuis).
L'un des livres les plus justement populaires chez les enfants en Angleterre et aux Etats-Unis.

* **Les Mémoires d'un Ane,** par la Ctesse de Ségur.
Les espiègleries de Cadichon auront toujours des lecteurs.

* **Un Bon Petit diable,** par la Ctesse de Ségur.
Pas toujours commode à manier, notre héros ; mais il a de bons sentiments qui font oublier ses incartades.

* **Le Mauvais Génie,** par la Ctesse de Ségur.
Les effets d'une mauvaise fréquentation sont heureusement corrigés par l'intervention d'un *bon génie*.

François le Bossu, par la Ctesse de Ségur.
L'on y voit qu'aux yeux des personnes bien nées la bonté est préférable aux avantages physiques.

Aventures du Baron de Munchhausen.
Récits très amusants, pleins d'imagination.

Les Chercheurs d'Épaves, par M. Champagne.
Dramatique récit de recherches au fond de la mer.

Tarass Boulba, par Gogol.
Histoire d'un chef cosaque.

* **Les Mille et Une Nuits,** (d'après Galland).
Le merveilleux en déborde, charme l'imagination sans risquer de la corrompre.

Les Trois petits Mousquetaires, par Desbeaux.
Captivante histoire de quatre lycéens (car les trois petits Mousquetaires étaient quatre).

* **Contes,** par Alexandre Dumas.
Huit chefs-d'œuvre.

Impressions de Voyage en Suisse, par A. Dumas.
Le récit de ce voyage est fait avec beaucoup de verve

Acté, par Alexandre Dumas.
Roman des temps néroniens.

François Bûchamor, par A. Assollant.
Un Grand-Père, vieux soldat de l'An II, raconte ses souvenirs... illustré par Job.

Le Petit Fauconnier de Louis XIII, par Jules Chancel.
Roman historique à la manière d'Alexandre Dumas Le jeune héros n'est autre que le fils de Concini.

Le Page de Marie Stuart, par Walter Scott.
Ce roman nous fait assister à des événements, qui ont précédé la triste fin de la jolie reine d'Ecosse.

L'Antiquaire, par Walter Scott.
Cette adaptation, excellente, a permis de retrancher quelques digressions que la jeunesse goûte peu.

Le dernier des Mohicans, par F. Cooper.
Cooper sait à merveille entraîner le lecteur, le tenir en haleine, mélanger l'histoire à la fiction.

La Case de l'Oncle Tom, par Mme Beecher-Stowe.
C'est l'un des livres les plus populaires, l'un de ceux qui ont le mieux dépeint les misères de l'esclavage.

LIBRAIRIE DELAGRAVE, 15, Rue Soufflot, Paris (V^e)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

Arithmétique. *Calcul mental, Système métrique* (Cl. de 6e et 5e). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Arithmétique, Algèbre (Cl. de 4e et 3e). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Éléments de Géométrie plane (Cl. de 4e et 3e). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Algèbre (Cl. de 2e et 1re). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Précis de Géométrie.

I. Géométrie plane (Cl. de 2e). Un vol. in-8°, br. ou cart.

II. Géométrie dans l'espace (Cl. de 1re). Un vol. in-8°, br. ou cart.

III. Compléments, Transformations, Coniques (Cl. de Math.). Un vol. br. ou cart.

Algèbre et Cosmographie (Cl. de Philo.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Arithmétique (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Précis d'Algèbre (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Trigonométrie (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Géométrie Descriptive (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Mécanique (Cl. de Math.). Un vol. in-8°, br. ou cart.

Précis de Cosmographie (Cl. de Math.). Un vol in-8°, br. ou cart.

NOUVEAUX PROGRAMMES

PRÉCIS
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

à l'usage de l'Enseignement secondaire

PAR

F. BRACHET
Ancien élève de l'École Normale supérieure
Inspecteur en chef de l'Instruction publique
de l'Indochine.

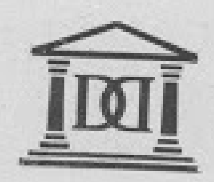
et

J. DUMARQUÉ
Ancien élève de l'École Normale supérieure
Agrégé de l'Université
Professeur au Lycée Condorcet.

278 FIGURES

304 EXERCICES ET PROBLÈMES

TROISIÈME ÉDITION



PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1933

AVERTISSEMENT

Les éléments de géométrie cotée (pages 6 à 32) précèdent les éléments de géométrie descriptive (pages 33 à 83), mais la rédaction permet de commencer indifféremment par les uns ou par les autres.

En géométrie descriptive, on a adopté la terminologie (plan frontal de projection) conseillée par l'Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement secondaire; l'expérience montre qu'il n'en résulte que des avantages, la corrélation de langage entre les deux projections étant désormais parfaite.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. But. — La géométrie descriptive a pour but de représenter les figures de l'espace au moyen de leurs projections planes, de telle manière qu'il soit possible d'effectuer exactement toutes constructions nécessaires (droites et plans perpendiculaires par exemple) et de mesurer les éléments des figures considérées.

2. Détermination d'un point. — C'est le problème fondamental parce que toute figure est un ensemble de points.

Pour repérer un point M de l'espace, choisissons un plan quelconque, par exemple un plan horizontal H ; soit *m* la projection de M sur ce plan. Si M est connu, *m* en résulte, mais la réciproque est fausse : si *m* est donné, M

Fig. 1.

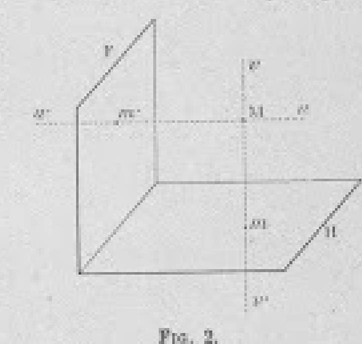


Fig. 2.

est un point quelconque de la perpendiculaire au plan H en *m*. Pour achever de déterminer le point M, on peut employer deux procédés :

1° On donne la valeur algébrique de la distance *m*M du point M au plan H (**cote** de M). C'est la **Géométrie cotée** (fig. 1).

2° On choisit un deuxième plan de projection F, le plus souvent perpendiculaire au plan H et on donne la projection *m'* de M sur le plan F (fig. 2); le point M est déterminé par l'intersection des perpendiculaires *vv'* et *uu'* aux plans H et F en *m* et *m'*. C'est la **Géométrie descriptive à deux projections** [1].

1. Pour abréger le langage, nous réserverons désormais le nom de « Géométrie descriptive » à la méthode des deux projections; c'est ainsi que la désignait son inventeur, Monge (1746-1818).

ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES EN GÉOMÉTRIE COTÉE

LIVRE I

LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE I

LE POINT ET LA DROITE

§ 1. — ÉPURE DU POINT. GÉNÉRALITÉS

3. Épure du point. — En géométrie cotée, un point est défini :

1° par sa projection sur un plan horizontal H appelé **plan de comparaison**;

2° par sa distance au plan de comparaison, comptée positivement au-dessus de ce plan et négativement au-dessous. Ce nombre algé-

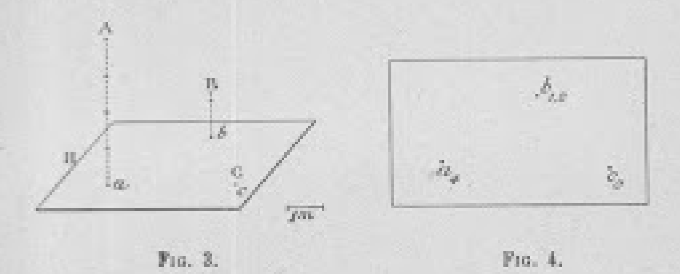


Fig. 3. Fig. 4.

brique s'appelle **cote** du point considéré. On l'inscrit sur l'épure à côté de la lettre qui désigne la projection du point (fig. 3 et 4). On énonce la lettre puis la cote.

On appelle **point à cote ronde** un point dont la cote est un nombre entier (a_4).

Les points du plan de comparaison ont pour cote *zéro* (c_0).

4. Échelle numérique. Échelle graphique. — La Géométrie cotée est surtout employée en Topographie; les dimensions des

objets étudiés dépassent donc le plus souvent celles de l'épure. C'est pourquoi on représente sur l'épure une **figure semblable** à la projection réelle. Le rapport de similitude, qui s'appelle **échelle numérique**, est généralement pris sous la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier simple. Ainsi, la carte d'État-major est à l'échelle $\frac{1}{80\,000}$ de sorte qu'un segment de l'épure de 1^{mm} correspond à un segment de la projection réelle de $1^{mm} \times 80\,000 = 80\,000^{mm} = 80^{m}$.

5. — Pour effectuer rapidement la *réduction à l'échelle* des dimensions de l'objet représenté ou l'opération inverse, on utilise le plus souvent l'**échelle graphique**. On l'obtient en portant sur une droite, à partir d'une origine O et vers la droite 1, 2, 3, ... fois l'unité de longueur réduite à l'échelle. Cette unité de longueur est,

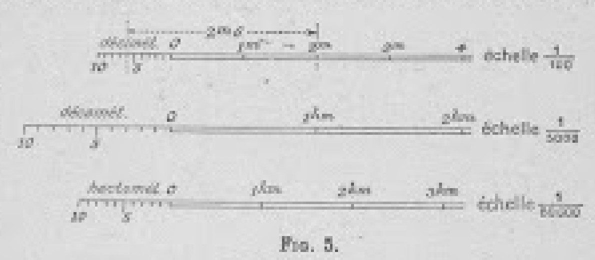


Fig. 5.

selon la grandeur de l'échelle numérique, le mètre, le décamètre, etc. (fig. 5). A gauche du point O, on porte une unité réduite divisée en dixièmes; c'est le **talon**.

On utilise l'échelle graphique comme la figure l'indique, au moyen d'une bande de papier ou d'un compas à pointes sèches. L'opération comporte une précision de l'ordre de grandeur du quart de millimètre; l'évaluation d'une longueur est donc faite :

à 20^{m} près si l'échelle numérique est 1/80 000;

à $1^{m},25$ près — est 1/5 000.

L'échelle numérique et l'échelle graphique sont deux représentations différentes du rapport de similitude liant l'objet réel et l'objet figuré. En principe, *l'une ou l'autre doivent toujours être indiquées sur l'épure*[1].

1. Cependant, pour abréger, nous nous bornerons souvent à représenter l'unité graphique réduite à l'échelle. Il nous arrivera même de ne pas joindre le segment-unité à certaines épures très simples qui seront données dans la suite.

6. Définitions. — On appelle :

trace d'une droite son point d'intersection avec le plan de comparaison (fig. 6) ;

trace d'un plan sa droite d'intersection avec le plan de comparaison (fig. 6).

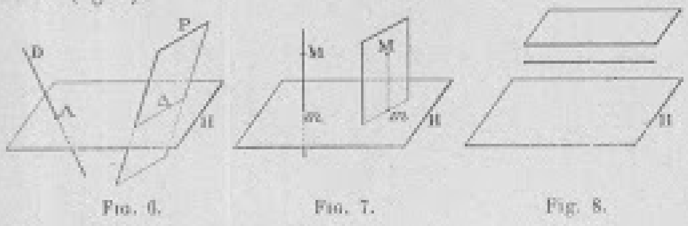


Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

On dit qu'une droite ou un plan sont :

verticaux quand ils sont perpendiculaires au plan de comparaison (fig. 7)

horizontaux quand ils sont parallèles au plan de comparaison (fig. 8).

Tous les points d'une droite verticale se projettent sur sa trace.

Tous les points d'un plan vertical se projettent sur sa trace (G. E. 84).

Une droite horizontale ou un plan horizontal n'ont pas de traces.

7. Rabattement d'un plan vertical sur un plan horizontal.

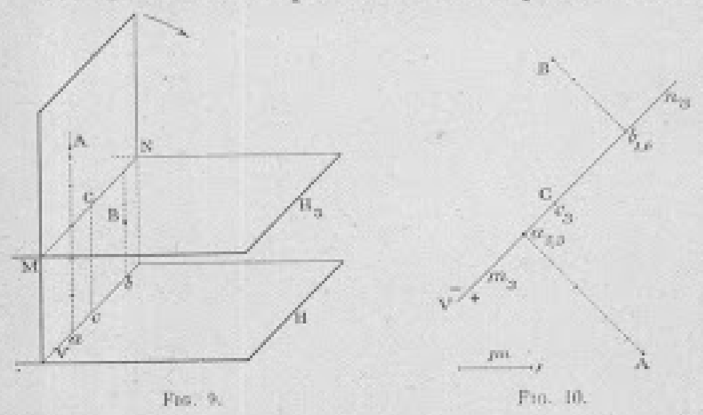


Fig. 9. Fig. 10.

— Soit un plan vertical donné par sa trace V (fig. 9 et 10), un plan horizontal H_3, défini par sa cote 3, et leur intersection m_3n_3 (horizontale). Si on fait tourner le plan vertical autour de la droite m_3n_3 (appelée **charnière**) jusqu'à l'appliquer sur le plan H_3, on dit qu'on l'a **rabattu** sur le plan H_3.

Un point $a_{5,3}$ du plan vertical vient se placer sur la perpendiculaire en a à la trace V (qui est la projection de MN) à une distance aA égale à la différence des cotes du point et du plan H_3

$$5,3 - 3 = 2,3.$$

Les points dont la cote est supérieure à 3 se placent d'un certain côté de la trace V, et les autres, de l'autre côté.

Les points de la charnière m_3n_3 ne bougent pas pendant le rabattement.

Étant donné un point B du rabattement, on trouve sa projection et sa cote par l'opération inverse qui porte le nom de **relèvement**.

§ 2. — LA LIGNE DROITE. PENTE ET INTERVALLE

8. Épure de la droite. — La projection d'une droite est en général une droite (G. E. 89) ; il n'y a exception que pour les verticales : leur projection se réduit à un point (fig. 11).

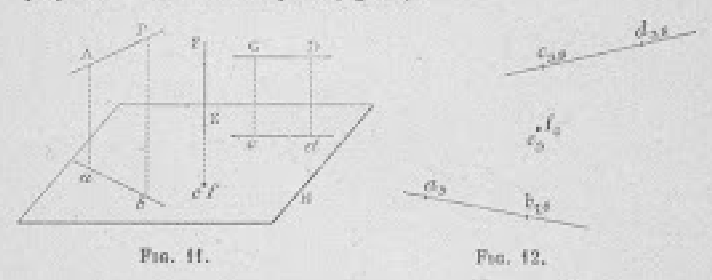


Fig. 11. Fig. 12.

Sur l'épure, une droite quelconque est définie par la projection cotée de deux de ses points ($a_2b_{7,8}$, fig. 12).

Si ces deux points ont la même cote, la droite est horizontale et réciproquement ($c_{2,8}d_{2,8}$, fig. 12).

Si ces deux points ont la même projection, la droite est verticale et réciproquement (e_5f_5, fig. 12).

9. Définition. — On appelle **pente d'une droite** la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec le plan horizontal.

Soit une droite AB (fig. 13) sa projection ab ; désignons les cotes des points A, B par $\alpha = a\text{A}$, $\beta = b\text{B}$.

Menons, dans le plan projetant AB, l'horizontale AC.

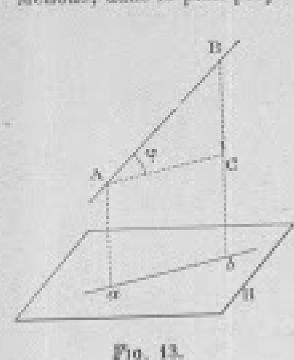


Fig. 13.

L'angle $\varphi = \mathrm{BAC}$ est l'angle de la droite avec le plan horizontal et on voit que

$$p = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\beta - \alpha}{ab}$$

d'où la règle :

10. Règle. — *La pente d'une droite est égale au quotient de la différence des cotes de deux de ses points par la distance de leurs projections.*

11. Problème fondamental. — *Une droite est donnée par deux points a_α, b_β* (fig. 14) ; *trouver la cote x d'un point de cette droite connaissant sa projection horizontale m.*

Nous supposons que la droite donnée n'est ni horizontale (réponse immédiate) ni verticale (problème indéterminé).

1° **Calcul.** — Évaluons la pente de la droite de deux manières :

$$p = \frac{\beta - \alpha}{ab} = \frac{x - \alpha}{am}$$

d'où

$$x = \alpha + \frac{am}{ab}(\beta - \alpha).$$

Notons que dans le calcul du *rapport* $\frac{am}{ab}$, on peut évaluer chaque terme en unités graphiques ou en centimètres.



Fig. 14.

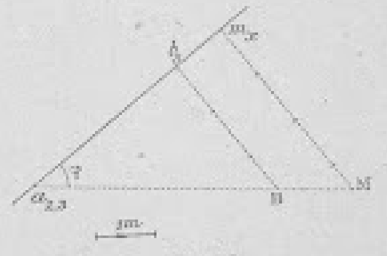


Fig. 15.

Faire le calcul numérique sur la figure 15.

2° **Rabattement.** — Soit la droite $a_{2,3}b_5$ (fig. 15). Rabattons son plan projetant autour de l'horizontale du point $a_{2,3}$; ce

point ne bouge pas ; le point b_5 vient en B sur la perpendiculaire en b à ab à la distance $b\mathrm{B} = 5 - 2{,}3 = 2{,}7$. Le rabattement M de m est à la rencontre de $a\mathrm{B}$ avec la perpendiculaire en m à ab ; on a :

$$x = 2{,}3 + m\mathrm{M} = 2{,}3 + 3{,}6 = 5{,}9.$$

12. Remarque. — En topographie, la différence des cotes de deux points est généralement faible par rapport à leur distance horizontale ; les erreurs de construction sont donc plus difficiles à éviter ; aussi, dans les problèmes de ce genre, on préfère le plus souvent la solution par le calcul.

13. Exercices. — I. *Angle d'une droite $a_{2,3}b_5$ avec le plan horizontal* (fig. 15).

On peut calculer immédiatement la tangente de cet angle, c'est-à-dire la pente de la droite :

$$\operatorname{tg}\varphi = p = \frac{\beta - \alpha}{ab} = \frac{5 - 2{,}3}{3{,}1} = 0{,}87.$$

On peut également rabattre le plan vertical projetant la droite ; l'angle Bab est l'angle φ cherché.

II. — *Distance de deux points $a_{2,3}b_5$* (fig. 15).

Le même rabattement donne cette distance en $a\mathrm{B}$; si on préfère le calcul, le triangle rectangle $ab\mathrm{B}$ montre que

$$\overline{a\mathrm{B}}^2 = (5 - 2{,}3)^2 + (3{,}1)^2$$
$$a\mathrm{B} = 4{,}1.$$

La formule générale serait, avec les notations du n° 9

$$d^2 = (\beta - \alpha)^2 + \overline{ab}^2.$$

14. Problème inverse. — *Une droite est donnée par deux points $a_{3,8}$, $b_{6,6}$* (fig. 16); *trouver la projection du point de cette droite qui a une cote donnée.*

Nous supposons que la droite donnée n'est ni horizontale (problème impossible ou indéterminé) ni verticale (réponse immédiate).

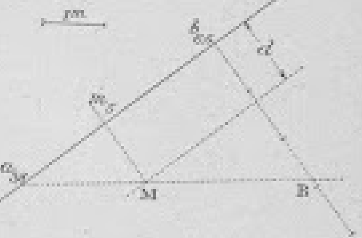


Fig. 16.

1° **Calcul.** — Cherchons la projection m du point de cote 5. Évaluons la pente de la droite de deux manières

$$p = \frac{6{,}6 - 3{,}8}{ab} = \frac{5 - 3{,}8}{am}$$

d'où $$am = ab\frac{5-3,8}{6,6-3,8} = ab \times 0,45.$$

5 étant supérieur à 3,8, on porte am à partir de a dans le sens des cotes croissantes.

2° **Rabattement.** — Le même qu'au n° 11 ; on trace sur ce rabattement la parallèle à ab à la distance

$$d = 5 - 3,8 = +1,2.$$

Son point de rencontre M avec aB est le rabattement du point cherché; on le relève en m au moyen de la perpendiculaire mM à ab.

15. Exercice. — *Chercher la trace d'une droite.*

C'est le point de cote zéro.

16. Graduation d'une droite. — On dit qu'une droite est graduée quand on connait les points à cote ronde (fig. 17).

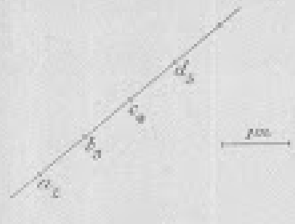


FIG. 17.

Ces points $a_2\ b_3\ c_4, \dots$ sont à l'intersection de la droite donnée avec des plans horizontaux équidistants; ils sont donc équidistants dans l'espace et par suite aussi en projection. Si on en connait deux, les autres en résultent immédiatement.

Pour graduer une droite $m_{3,4}p_{7,6}$ (faire la figure), on construit les projections a, d des points de cote 2 et 5, par exemple (14); on partage ad en trois parties égales et on prolonge la graduation.

17. Définition. — On appelle **intervalle** d'une droite la distance des projections de deux points à cote ronde consécutifs de cette droite.

$$i = ab = bc = cd. \qquad \text{(fig. 17)}$$

La formule du n° 9 donne

$$p = \frac{\beta - \alpha}{ab} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{i} \qquad \text{ou} \qquad i = \frac{1}{p}$$

d'où la règle :

18. Règle — *L'intervalle et la pente d'une droite sont deux nombres inverses l'un de l'autre.*

Ainsi, quand l'angle φ de la droite avec le plan horizontal est égal à 60°, on a

$$p = \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \qquad i = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

19. REMARQUE. — Il est clair que la distance uv des projections de deux points d'une droite (fig. 18) dont les cotes, sans être rondes, diffèrent de 1, est aussi égale à l'intervalle de cette droite :

$$i = \frac{1}{p} = \frac{uv}{6,3-5,3} = uv.$$

20. Problème. — *Déterminer par une construction la pente d'une droite graduée.*

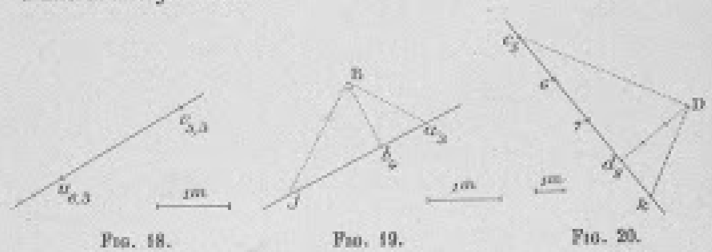


FIG. 18. FIG. 19. FIG. 20.

On trace d'abord (fig. 19) le segment bB perpendiculaire à ab et égal à l'unité graphique; la perpendiculaire en B à aB coupe ab en un certain point j; le triangle rectangle aBj donne

$$\overline{\mathrm{B}b}^2 = ab.bj \qquad \text{ou} \qquad 1 = i \times bj.$$

La pente est égale à la mesure du segment bj.

Si cette construction est trop petite pour être précise, on opère sur 3 intervalles, par exemple (fig. 20); on prend dD égal à 3 unités graphiques et on a

$$3i \times dk = 3^2$$

d'où $$dk = 3 \times \frac{1}{i} = 3p.$$

§ 3. — DROITES PARALLÈLES. DROITES CONCOURANTES

Droites parallèles.

21. Toutes les verticales sont parallèles entre elles.

Une horizontale étant parallèle à sa projection, pour que deux horizontales soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections le soient (fig. 21).

Considérons maintenant deux droites **quelconques** parallèles AB

et CD (fig. 22). On a démontré en géométrie (G. E. 91) que *leurs projections sont parallèles*; d'autre part elles font des angles égaux

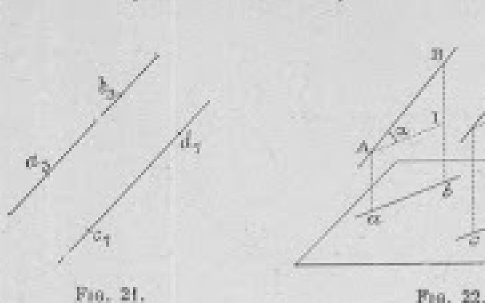


Fig. 21. Fig. 22.

avec le plan horizontal et ont, par suite, des *intervalles égaux*; enfin le sens des cotes croissantes est le même sur AB et CD; comme cette propriété se conserve en projection, les droites ont sur l'épure *des graduations de même sens*.

Examinons si ces trois conditions nécessaires sont suffisantes; considérons deux droites a_2b_3 et c_2d_3 (fig. 23) ayant des projections parallèles, des intervalles égaux et des graduations de même sens. Les vecteurs ab, cd étant équipollents, la figure $abdc$ est un parallélogramme; les horizontales a_2c_2, b_3d_3 ayant leurs projections parallèles sont parallèles; elles sont dans un même plan, lequel contient les droites données. Ces deux droites ne pouvant être concourantes, puisque leurs projections sont parallèles, sont elles-mêmes parallèles.

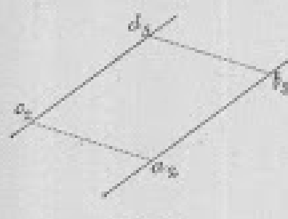


Fig. 23.

En résumé, nous avons mis en évidence l'énoncé suivant :

22. Théorème. — *Pour que deux droites quelconques soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles aient :*

1° *des projections parallèles*;

2° *des intervalles égaux*;

3° *des graduations de même sens*.

23. Remarque. — Notons la propriété qui a été utilisée dans le raisonnement précédent : si deux droites d'un même plan ont leurs projections parallèles, elles sont nécessairement parallèles.

24. Problème. — *Mener par un point la parallèle à une droite.*

Si la droite donnée a_3b_8 est graduée (fig. 24) on mène par la projection m du point donné $m_{2,7}$ le vecteur mn équipollent à ab; la droite $m_{2,7}n_{7,7}$ est la droite cherchée.

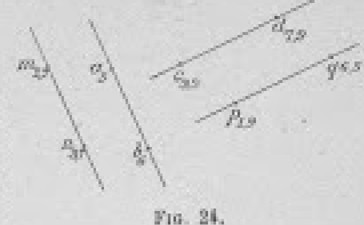


Fig. 24.

Si la droite donnée $c_{3,3}d_{7,9}$ est définie par deux points quelconques, on mène encore par la projection du point donné $p_{1,9}$ le vecteur pq équipollent à cd; la cote du point q est

$$1,9+(7,9-3,3)=1,9+4,6=6,5.$$

Droites concourantes.

25. — Deux droites concourantes quelconques ont leurs projections concourantes, mais cette condition nécessaire, n'est évidemment pas suffisante; résolvons le problème suivant :

26. Problème. — *Reconnaître si deux droites quelconques* AB *et* CD *dont les projections sont concourantes sont elles-mêmes concourantes.*

Si le point de rencontre m des projections des deux droites $a_{5,8}b_{7,6}$ et $c_{2,2}d_{8,8}$ (fig. 25) est **sur l'épure**, on cherche sa cote x sur la pre-

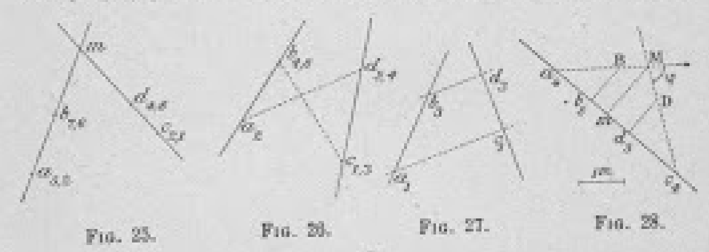


Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28.

mière droite et sa cote y sur la 2ᵉ droite (11); la condition nécessaire et suffisante pour que les droites soient concourantes est $x=y$.

Si les projections des deux droites se coupent **en dehors de l'épure** (fig. 26), on trace les droites $a_2d_{5,4}$ et $b_{4,8}c_{1,3}$ dont les projections se coupent sur l'épure; si les droites de l'un de ces deux couples sont concourantes, les quatre droites sont dans le même plan et les droites de l'autre couple sont nécessairement concourantes; on est

donc ramené à examiner, comme on vient d'apprendre à le faire, si les droites $a_2d_{3,4}$ et $b_{4,6}c_{1,2}$ sont concourantes.

Si les droites données *sont graduées* (fig. 27) on trace les horizontales a_2c_2 et b_2d_2 s'appuyant sur ces deux droites. Remarquons à ce sujet que les horizontales d'un plan sont parallèles comme intersections de ce plan par des plans horizontaux. Pour que les deux droites données se rencontrent, il faut et il suffit que les horizontales a_2c_2 et b_2d_2, soient parallèles; on est ainsi ramené à examiner si les projections ac et bd de ces deux horizontales sont parallèles.

Si les droites données a_4b_6 et c_4d_6 *ont leurs projections confondues*, (fig. 28) elles ont le même plan projetant et par suite, sont concourantes ou parallèles; le théorème n° 22 permet de voir si elles sont parallèles; si elles ne le sont pas, on cherche leur point de concours par un rabattement. Remarquons que cette construction donne également l'angle φ des deux droites.

27. Exercices. — I. Dire à quelle condition deux horizontales sont concourantes (faire la figure).

II. Dire à quelle condition une verticale et une droite quelconque sont concourantes (faire la figure).

III. Mener par un point donné une droite s'appuyant sur deux droites données, dont l'une est verticale (faire l'épure).

CHAPITRE II. — LE PLAN

28. Plans remarquables. — Ce sont :

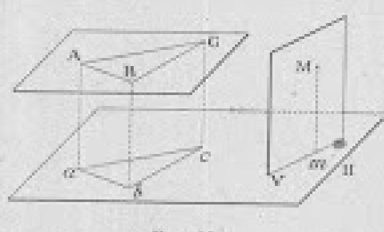


FIG. 29.

1° Un plan horizontal; il est défini par sa cote.

Toute figure d'un plan horizontal est égale à sa projection (fig. 29).

2° Un plan vertical; il est défini par sa trace V. Pour qu'un point appartienne à un plan vertical, il faut et il suffit qu'il se projette sur la trace de ce plan (fig. 29).

29. Représentation d'un plan quelconque. — On peut définir un plan sur une épure de la même manière qu'en géométrie :

1° par deux droites concourantes;

2° par une droite et un point extérieur;

3° par trois points non en ligne droite;

4° par deux droites parallèles.

Ces différents procédés se ramènent aisément les uns aux autres. Le premier est graphiquement le plus commode.

Droites remarquables d'un plan.

I. — **Horizontales.**

30. — Toutes les horizontales d'un plan s'obtiennent en coupant par les plans horizontaux (fig. 30), par suite :

31. Théorème. — *Toutes les horizontales d'un plan sont parallèles entre elles et parallèles en particulier à la trace de ce plan.*

32. Problème. — *Déterminer l'horizontale de cote donnée d'un plan donné.*

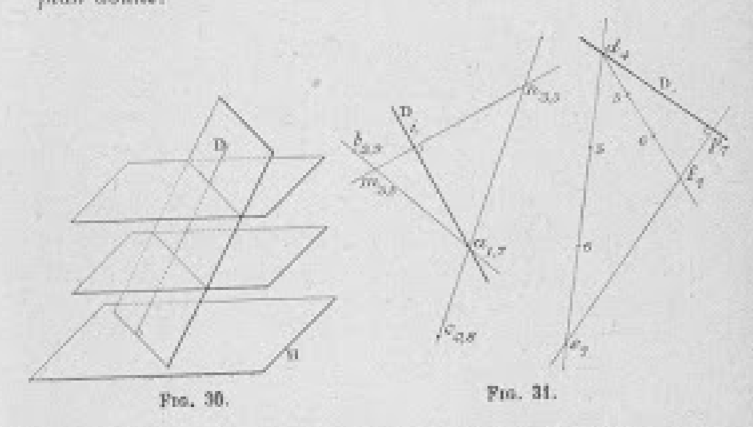


FIG. 30. FIG. 31.

Soit le plan $a_{1,7}b_{3,3}c_{2,8}$; pour déterminer l'horizontale de cote 3,5, on construit sur chaque droite le point de cote 3,5 (fig. 31); la droite $m_{3,5}n_{3,5}$ est l'horizontale cherchée.

La solution devient immédiate quand on demande une horizontale à cote ronde dans un plan défini par deux droites graduées (fig. 31).

33. Autre interprétation. — Le problème précédent ne diffère pas du suivant : *Construire la droite d'intersection d'un plan quelconque avec un plan horizontal.*

II. — **Lignes de pente.**

34. — On appelle **ligne de pente** d'un plan par rapport au plan

horizontal toute droite D de ce plan perpendiculaire à ses horizontales (fig. 30).

Les théorèmes sur la projection de l'angle droit montrent que :

Pour qu'une droite d'un plan soit ligne de pente de ce plan, il faut et il suffit que sa projection soit perpendiculaire aux projections des horizontales du plan.

On déduit aisément de cette règle la construction d'une ligne de pente D d'un plan défini par deux droites concourantes, graduées ou non (fig. 31).

35. Représentation d'un plan par une ligne de pente. — Rappelons la propriété fondamentale suivante :

Une ligne de pente d'un plan suffit pour définir ce plan.

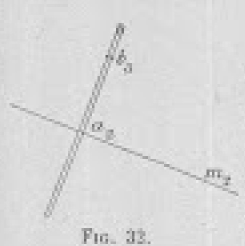


Fig. 32.

En effet, si on connait une ligne de pente a_2b_3 d'un plan (fig. 32) on a immédiatement une horizontale a_2m_2 de ce plan, en traçant sa projection perpendiculaire à ab.

On peut désormais définir un plan sur une épure par une de ses lignes de pente; pour distinguer une telle droite, on la représente par un double trait; en outre, on la suppose toujours graduée.

Rappelons, à ce sujet, que *l'angle d'un plan avec le plan horizontal est égal à l'angle d'une de ses lignes de pente avec le plan horizontal* (G. E. 107).

36. Définitions. — On appelle :

1° **échelle de pente**[1] d'un plan, une ligne de pente graduée de ce plan servant à le définir;

2° **pente et intervalle** d'un plan la pente et l'intervalle de son échelle de pente.

Remarque. — Si un plan est défini par deux droites concourantes graduées, on en déduit aisément deux horizontales puis une échelle de pente; nous nous bornerons donc, dans les problèmes qui vont suivre, aux deux modes de représentation suivants :

plan défini par deux droites concourantes non graduées;

— une échelle de pente.

1. Le double trait peut être regardé comme figurant les deux montants d'une échelle; ces deux montants définissent le plan et les barreaux sont portés par les horizontales du plan.

37. Problème fondamental. — *Déterminer une droite d'un plan donné, connaissant sa projection* D.

Supposons le *plan défini par deux droites concourantes* non graduées AB et AC (on donne les projections cotées des points A, B, C).

Si D rencontre ab et ac (fig. 33), on cherche la cote des points de rencontre p, q (11); $p_{3,1}q_{4,4}$ est la droite cherchée.

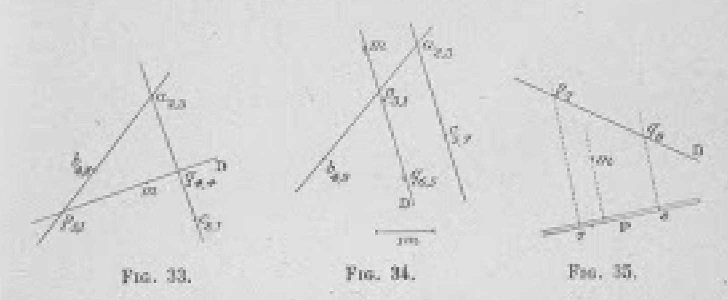


Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35.

Si D rencontre ab en p et est parallèle à ac (fig. 34), on cherche la cote de p; on porte $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{ac}$ et on cote le point q :

$$\text{cote de } q - \text{cote de } p = \text{cote de } c - \text{cote de } a.$$

Quand le plan est *défini par son échelle de pente* P (fig. 35) il suffit de tracer dans ce plan deux horizontales, de cote 7 et 8 par exemple, pour obtenir sur D les points p_7q_8.

38. Autre interprétation. — Le problème précédent ne diffère pas du suivant :

Chercher la droite d'intersection d'un plan donné avec un plan vertical donné par sa trace D.

Nous avons vu en effet que toute figure d'un tel plan, et en particulier la droite d'intersection, se projette sur la trace de ce plan.

39. Exercice. — *Prendre une droite dans un plan donné.* On peut se donner arbitrairement la projection de la droite et on en déduit deux points cotés comme on vient de l'indiquer.

40. Problème. — *Déterminer un point d'un plan connaissant sa projection* m.

Si le plan est donné par deux droites concourantes (fig. 33 et 34), on fait passer par m une droite D considérée comme la projection d'une droite du plan; on en détermine deux points cotés et on cherche la cote du point de cette droite ayant pour projection m (11).

Si le plan est donné par son échelle de pente (fig. 35) on utilise l'horizontale de ce plan dont la projection passe par m.

41. Autre interprétation. — Le problème précédent ne diffère pas du suivant : *chercher le point d'intersection d'un plan donné avec une verticale donnée.*

42. Exercice. — *Prendre un point dans un plan donné.* On peut se donner arbitrairement la projection du point et on cherche sa cote comme on vient de l'indiquer.

43. Problème. — *Par un point donné d'un plan, mener dans ce plan une droite de pente donnée p.*

Soit D l'échelle de pente du plan donné, $a_{2,7}$ un point de ce plan. Supposons le problème résolu et considérons sur la droite cherchée

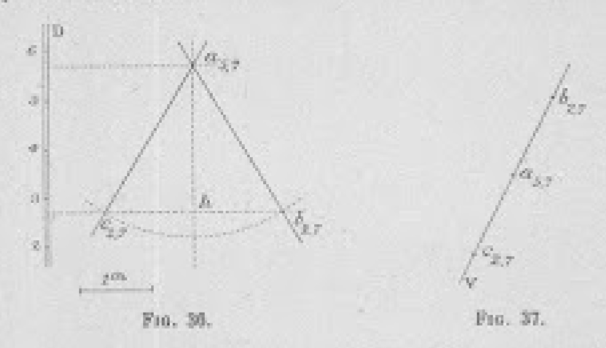


Fig. 36. Fig. 37.

le point $b_{5,7}$ dont la cote diffère de celle de a d'un certain nombre entier, 3 par exemple. Nous remarquons :

d'une part que b doit se trouver sur l'horizontale de cote 2,7 du plan donné;

d'autre part que ab est égal à 3 fois l'intervalle de la droite $a_{2,7}b_{5,7}$

$$ab = 3i = 3 \times \frac{1}{p};$$

b doit donc se trouver sur le cercle de centre a et de rayon $3 \times \frac{1}{p}$.

Le tracé de ces deux lieux géométriques donne le point b.

Discussion. — Le problème étant ramené à l'intersection d'une droite et d'un cercle, trois cas sont possibles :

1° $ab > ah$ ou, en appelant P la pente du plan, $\frac{3}{p} > \frac{3}{P}$ ou enfin

$p < P$ 2 solutions ab, ac.

2° $ab = ah$ ou $p = P$ une solution, la ligne de pente du point donné (solution double).

3° $ab < ah$ ou $p > P$ aucune solution.

La condition de possibilité $p \leqslant P$ était à prévoir puisque les lignes de pente d'un plan sont, parmi toutes les droites de ce plan, celles qui ont la pente maximum.

Exercice. — Si le plan donné est vertical (fig. 37), on remarque que $ab = 3i$; on trouve ainsi immédiatement deux solutions quel que soit i.

44. Problème. — *Par une droite donnée, faire passer un plan de pente donnée P.*

Soit a_3b_5 la droite donnée (fig. 38). Les horizontales du plan passant par a_3 et par b_5 ont pour différence de cote 2. Les déterminer revient donc à mener par a et b deux parallèles dont la distance, $2l = 2 \times \frac{1}{P}$, est connue.

Le problème consiste à construire sur une hypoténuse donnée ab

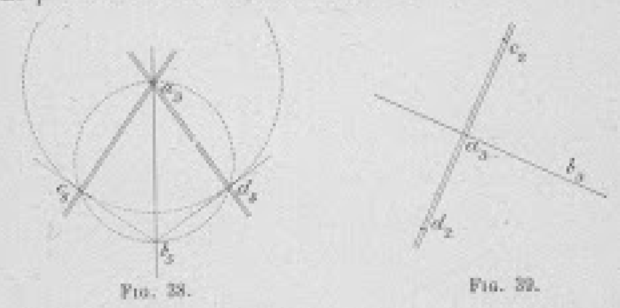


Fig. 38. Fig. 39.

un triangle rectangle abc dont le côté $ac = 2l$ est connu. (Intersection du cercle de diamètre ab et du cercle de centre a et de rayon $2l$.

b_5c_5 est une horizontale, a_3c_5 une échelle de pente du plan.

Discussion. — Trois cas sont possibles :

1° $ab > ac$ ou, en appelant p la pente de la droite

$$\frac{2}{p} > \frac{2}{P} \quad \text{ou} \quad P > p;$$

2 solutions ayant pour échelles de pente a_3c_5 et a_3d_5.

2° $ab = ac$ ou $P = p$ une solution, le plan ayant pour échelle de pente la droite donnée (solution double).

3° $ab < ac$ ou $P < p$ aucune solution.

Même remarque que dans le problème précédent sur la condition de possibilité $P \geqslant p$.

Exercice. — Que peut-on dire des traces sur le plan H_2 des plans issus de a_5 et ayant une pente donnée P?

Cas particulier. — Reprendre le problème précédent quand la droite donnée est horizontale; on trouve toujours deux solutions (fig. 39).

LIVRE II

FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

CHAPITRE I. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES

Le parallélisme de deux droites a déjà été étudié.

§ 1. — PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

45. Problèmes. — I. *Reconnaître si une droite donnée* D *est parallèle à un plan donné.*



Fig. 40.

Si le plan donné est **horizontal**, il faut et il suffit que la droite D soit horizontale.

Si le plan donné est **vertical** (fig. 40) tout point de ce plan a sa projection sur la trace V du plan et réciproquement; par suite, pour que la droite D soit parallèle au plan V c'est-à-dire n'y ait aucun point il faut et il suffit que la trace V du plan donné et la projection de la droite D soient parallèles.

Dans le **cas général** où le plan donné est quelconque, on utilise le théorème suivant :

Pour qu'une droite D *et un plan* P *soient parallèles, il faut et il suffit que l'intersection du plan* P *avec un plan contenant la droite* D *soit parallèle à cette droite.*

On coupe le plan donné d'échelle de pente P (fig. 44) par le plan vertical projetant la droite donnée a_2b_6; on a vu (38) comment on détermine leur intersection c_2d_3; il reste à examiner si les droites a_2b_6 et c_2d_3 sont parallèles.

II. — *Mener par une droite* $a_{7,5}b_{7,8}$ *le plan parallèle à une droite* m_2n_3 (fig. 42).

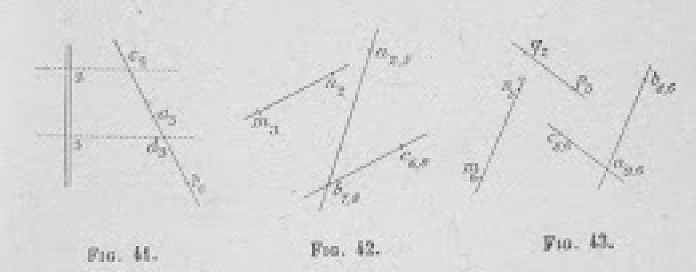


Fig. 41. Fig. 42. Fig. 43.

Ce plan est défini par la droite donnée et par la parallèle $b_{7,8}c_{6,8}$ à m_2n_2.

III. — *Mener par un point* $a_{9,6}$ *le plan parallèle à deux droites données* m_6n_8 *et* p_5q_2 (fig. 43).

Ce plan est défini par les parallèles $a_{9,6}b_{8,6}$ et $a_{9,6}c_{8,6}$ aux deux droites données.

§ 2. — PLANS PARALLÈLES

46. — Rappelons les deux théorèmes suivants :

I. — *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.*

II. — *Deux plans sont définis chacun par deux droites concourantes; si ces droites sont parallèles entre elles deux à deux les deux plans sont parallèles.*

47. — Avant d'aborder le cas général, remarquons tout d'abord que :

1° deux plans horizontaux sont toujours parallèles;

2° la condition nécessaire et suffisante pour que deux plans verticaux soient parallèles est que leurs traces le soient.

48. — Considérons maintenant deux plans quelconques parallèles P et Q (fig. 44). Leurs traces AB et CD sont parallèles (46-I). Coupons

les deux plans par un plan vertical de trace V perpendiculaire à AB et CD; les intersections obtenues EF, GK sont respectivement des lignes de pente pour les plans P et Q et elles sont parallèles (46-I). Si on appelle G'K' une autre ligne de pente de Q, elle est parallèle à GK et par suite aussi à EF. En résumé, si deux plans sont parallèles, leurs échelles de pente sont nécessairement parallèles.

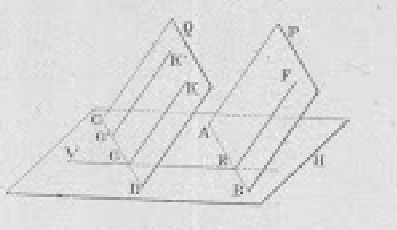


Fig. 44.

Fig. 45.

Inversement, considérons deux plans dont les échelles de pente D, Δ sont parallèles (fig. 45); traçons une horizontale de chaque plan ; a_2m_2 et b_2p_2; elles sont parallèles en projection et par suite aussi dans l'espace (21). Les deux plans donnés étant définis chacun par deux droites concourantes D et m_2a_2, Δ et b_2p_2, deux à deux parallèles entre elles, sont parallèles (46-II).

Nous aboutissons ainsi au théorème suivant :

49. Théorème. — *Pour que deux plans quelconques soient parallèles, il faut et il suffit que leurs échelles de pente soient parallèles.*

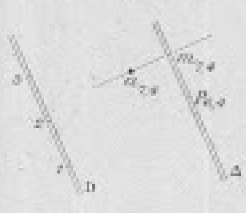


Fig. 46.

50. Problème. — *Mener par un point A le plan parallèle à un plan défini par son échelle de pente* D (fig. 46).

On pourrait mener par $a_{7,4}$ l'échelle de pente parallèle à D mais il convient de placer les échelles de pente en bordure des épures pour ne pas encombrer la partie centrale; on trace donc d'abord l'horizontale $a_{7,4}m_{7,4}$ du plan cherché, laquelle est perpendiculaire à D, puis on mène par le point $m_{7,4}$ l'échelle de pente Δ parallèle à D.

CHAPITRE II. — INTERSECTIONS DE DROITES ET DE PLANS

1. — INTERSECTION DE DEUX PLANS

51. Cas particulier. — L'un des plans est horizontal ou vertical.

Ces deux problèmes ne diffèrent pas :

1° de la recherche de l'horizontale de cote donnée du deuxième plan donné (32).

2° de la détermination d'une droite du deuxième plan donné connaissant la projection de cette droite (38).

52. — Cas général.

Méthode. — Pour chercher l'intersection de deux plans quelconques P et Q, on les coupe par un plan auxiliaire R (fig. 47); on détermine les intersections AB et CD du plan R avec les plans P et Q, puis on marque le point M commun à ces deux droites; c'est un premier point de l'intersection. On en construit un deuxième N au

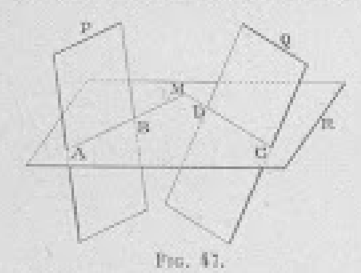


Fig. 47.

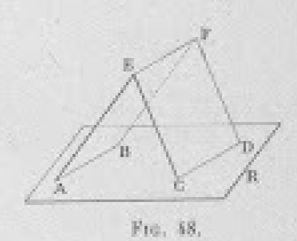


Fig. 48.

moyen d'un autre plan auxiliaire. La droite MN est l'intersection cherchée.

On choisit le plus souvent comme plan auxiliaire un plan horizontal, de manière à savoir déterminer les intersections auxiliaires AB et CD. On peut également prendre, le cas échéant, un plan vertical (38).

53. — Remarque. — Si un plan auxiliaire donne deux droites AB et CD parallèles (fig. 48), leur point commun M n'existe plus, mais il est remplacé par un renseignement équivalent : l'intersection

EF est parallèle à AB ou CD (G. E. n° 13). Un autre plan auxiliaire, non parallèle à R, donnera un point M de cette intersection.

Épures d'intersections de plans.

54. Cas général. — Pour obtenir l'intersection de deux plans définis par leurs échelles de pente D, Δ (fig. 49), on les a coupés par les plans horizontaux de cote 2 et 4 ; on a ainsi l'intersection a_4b_2.

Cas particulier. — Les échelles de pente D, Δ ont leurs projections parallèles.

55. 1re méthode (fig. 50). — Les horizontales des deux plans étant parallèles, leur intersection est une horizontale dont il suffit de

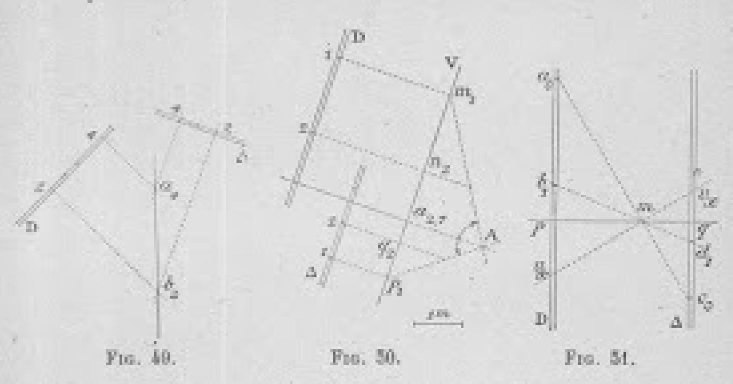


Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51.

déterminer un point. On l'obtient à l'aide d'un plan auxiliaire vertical V perpendiculaire aux horizontales des deux plans ; on rabat ce plan V sur le plan horizontal de cote 1 pour construire le point $a_{2,7}$ commun aux deux droites d'intersection. Remarquons que $m_1a_{4,1}p_1$ est un rectiligne de l'un des dièdres formés par les deux plans ; sa vraie grandeur est mAp.

56. 2e méthode (fig. 51). — L'intersection est une horizontale s'appuyant sur les deux échelles de pente D, Δ. Considérons deux quelconques de ces horizontales, l'une fixe a_6c_6, l'autre variable u_xv_x ; les segments de l'espace AU et CV sont proportionnels puisqu'ils sont interceptés sur deux droites par deux plans parallèles, l'un fixe, l'autre mobile ; cette propriété se conserve en projection ; les segments au et cv étant proportionnels, toutes les droites uv sont concourantes ; considérons en particulier a_6c_6 et b_1d_1 dont les projections se coupent en m ; la projection pq de l'intersection des deux plans passe par m

et elle est perpendiculaire à D et Δ. On détermine ensuite la cote de pq sur D ou sur Δ (sur la figure, c'est 1,4).

Cette méthode est artificielle, mais elle est graphiquement plus simple que la précédente. Elle sera souvent employée dans la suite.

§ 2. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

57. — Nous avons déjà traité les cas particuliers suivants :

1° Le plan est horizontal (14).

2° Le plan est vertical ; on a immédiatement la projection m du point commun et on est ramené au problème du n° 11.

3° la droite est verticale (41).

58. — Dans le **cas général**, on fait passer par la droite donnée D un plan auxiliaire R (fig. 52) et on détermine son intersection AB avec le plan donné P ; elle rencontre la droite D au point cherché M.

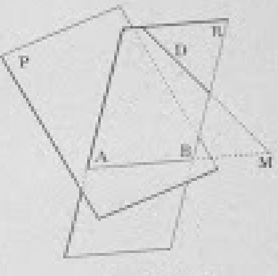


Fig. 52.

Le plan auxiliaire sera le plus souvent un plan quelconque passant par la droite, défini par une horizontale de direction arbitraire.

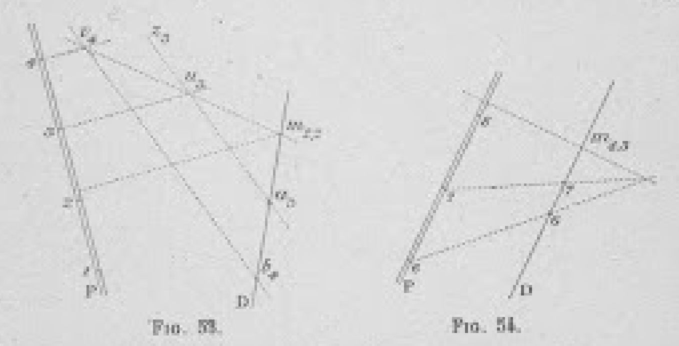


Fig. 53. Fig. 54.

59. 1re épure. — Soit le plan d'échelle de pente P et la droite graduée D (fig. 53). Le plan auxiliaire, défini par l'horizontale a_3z_3 coupe le plan P suivant la droite u_3v_4, laquelle rencontre D au point $m_{4,8}$ cherché.

60. 2e épure. — Dans le cas particulier où la droite donnée D est parallèle, en projection, à l'échelle de pente du plan (fig. 54), on peut prendre pour plan auxiliaire celui qui a D pour échelle de pente. On termine comme au n° 56.

Applications.

61. I. **Intersection de trois plans P, Q, R** (fig. 55). — On cherche

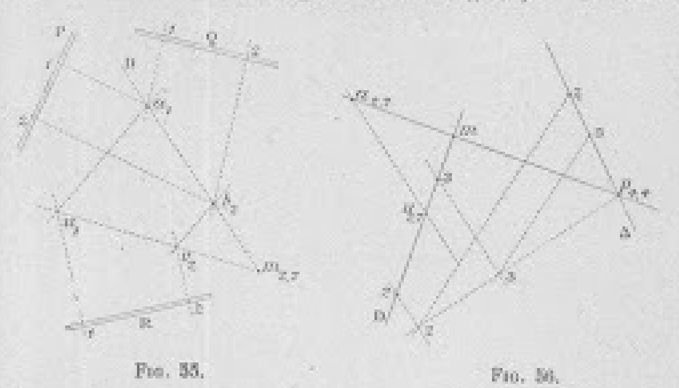


Fig. 55. Fig. 56.

la droite D d'intersection de deux de ces plans, P et Q par exemple, puis le point M d'intersection de la droite D avec le 3e plan donné; M est le point commun aux trois plans.

62. II. — **Problèmes de construction de droites.**

1° *Construire une droite issue d'un point $a_{6,7}$ s'appuyant sur deux droites* D, Δ (fig. 56).

On cherche le point $p_{4,4}$ d'intersection du plan aD avec la droite Δ. La droite cherchée est $a_{6,7}p_{4,4}$. On vérifie qu'elle est concourante avec D (chercher la cote de m).

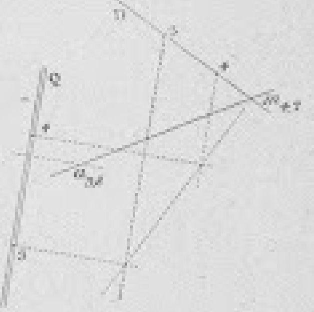


Fig. 57.

2°. — *Mener par un point $a_{3,8}$ une droite parallèle à un plan P et rencontrant une droite* D (fig. 57).

Le plan Q, passant par $a_{3,8}$ et parallèle au plan P coupe la droite D au point $m_{1,7}$. La droite cherchée est $a_{3,8}m_{1,7}$.

3°. — *Mener parallèlement à une direction donnée* D

une droite s'appuyant sur deux droites données A *et* B.

Le plan P mené par A parallèlement à D coupe B en un point M; la parallèle issue de M à D est la droite cherchée. On vérifie qu'elle est concourante avec A. (Faire l'épure.)

CHAPITRE III. — DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

63. — Pour qu'une droite soit perpendiculaire :

1° à un plan horizontal, il faut et il suffit qu'elle soit verticale;

2° à un plan vertical, il faut et il suffit qu'elle soit horizontale et perpendiculaire en projection à la trace du plan.

64. — Considérons maintenant un **plan quelconque** P et la droite AB qui lui est perpendiculaire (fig. 58).

Le plan vertical AaB projetant cette droite, étant perpendiculaire au plan P et au plan H, l'est aussi à la trace GT du plan P; par suite, son intersection AC avec le plan P est une ligne de pente dont la projection est confondue avec celle de AB. Une perpendiculaire à un plan est donc, *en projection, parallèle aux lignes de pente de ce plan.*

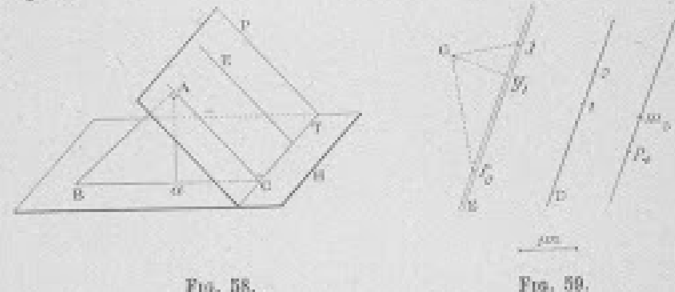


Fig. 58. Fig. 59.

D'autre part, dans le triangle rectangle ABC, les angles B et C de la droite AB et du plan P avec le plan H sont complémentaires; les tangentes de ces angles, c'est-à-dire les pentes de la droite AB et du plan P, sont *inverses l'une de l'autre* et *il en est de même pour les intervalles.*

Enfin, sur les projections de la droite AB et de la ligne de pente

AC les cotes croissent de B vers a et de C vers a; c'est-à-dire *en sens contraire*.

65. — Examinons si ces trois conditions sont suffisantes; supposons que la droite D et l'échelle de pente E d'un plan P (fig. 59) aient leurs projections parallèles, leurs intervalles inverses et leurs graduations de sens contraire.

Considérons une droite m_3p_4 perpendiculaire au plan P; elle satisfait nécessairement aux trois conditions précédentes; par suite, les droites D et m_3p_4 ont leurs projections parallèles (chacune est parallèle à E), leurs intervalles égaux (chacun est l'inverse de celui de E) et leurs graduations de même sens (chacune a le sens contraire de celle de E). La droite D est donc parallèle à m_3p_4, c'est-à-dire perpendiculaire au plan P.

En résumé, nous aboutissons au théorème suivant :

66. Théorème. — *Pour qu'une droite et un plan soient perpendiculaires, il faut et il suffit que cette droite et l'échelle de pente du plan aient :*

1° *leurs projections parallèles;*

2° *leurs intervalles inverses l'un de l'autre;*

3° *leurs graduations de sens contraires.*

67. 1er Problème. — *Mener par un point $a_{3,2}$ la perpendiculaire à un plan donné P; chercher son pied* [1] (fig. 60).

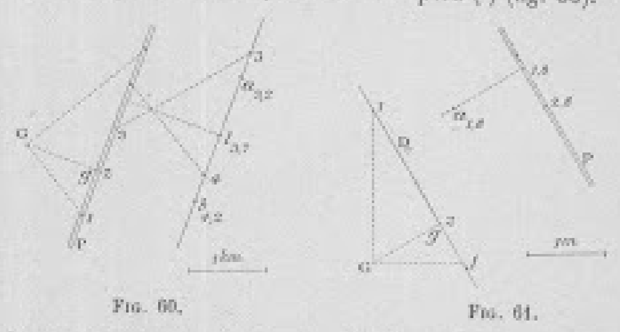


Fig. 60. Fig. 61.

On construit d'abord l'inverse de l'intervalle de l'échelle de pente P (20); on en déduit la perpendiculaire $a_{3,2}b_{4,2}$; on obtient son pied $i_{3,7}$ comme au n° 60.

Si on veut la longueur du segment $a_{3,2}i_{3,7}$, on opère comme il a été dit au n° 13-II (calcul ou rabattement).

(1) Ou : projeter un point sur un plan.

Remarque. — Si le plan P est vertical (faire l'épure), on a immédiatement la perpendiculaire (qui est horizontale) et son pied; la distance du point au plan est projetée en vraie grandeur.

68. 2e Problème. — *Mener par un point $a_{1,8}$ le plan perpendiculaire à une droite D; chercher son pied* [1] (fig. 61.)

Même méthode que dans le 1er problème.

Remarque. — Si la droite D est horizontale (faire l'épure), on a immédiatement le plan perpendiculaire (qui est vertical) et son pied.

69. 3e Problème. — *Mener par un point la perpendiculaire à une droite; chercher son pied.*

On construit le plan issu du point A et perpendiculaire à la droite, puis on cherche son pied I; la perpendiculaire cherchée est AI (faire l'épure).

Pour obtenir la distance du point à la droite, on opère encore par calcul ou rabattement.

70. 4e Problème. — *Perpendiculaire commune à deux droites* D, Δ. Dans le cas général, la méthode est la suivante :

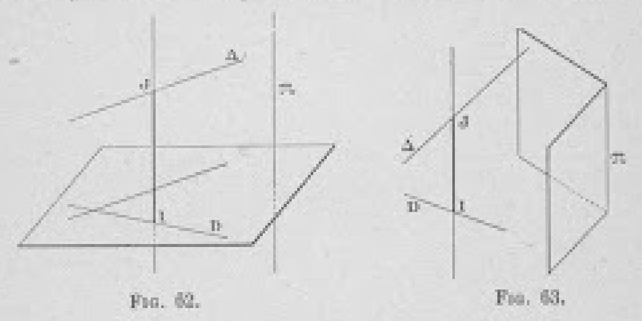


Fig. 62. Fig. 63.

1° On cherche la direction de la perpendiculaire commune; c'est la perpendiculaire π au plan mené par l'une des droites données parallèlement à l'autre (fig. 62) ou encore, si le tracé est plus commode, c'est l'intersection π de deux plans respectivement perpendiculaires aux deux droites données (fig. 63).

2° On construit la droite IJ parallèle à π s'appuyant sur D et Δ (62-3°).

(1) Ou : projeter un point sur une droite.

Nous nous bornerons à faire l'épure dans les deux cas particuliers suivants où le tracé se simplifie.

1er **Cas.** — *L'une des droites* D *est verticale* (*fig.* 64).

La droite cherchée est une horizontale dont la projection passe par le point D et est perpendiculaire à la projection de Δ; on peut tracer sa projection *ij*; on achève en déterminant la cote du point *j* sur Δ.

La plus courte distance des deux droites est égale au segment *ij*.

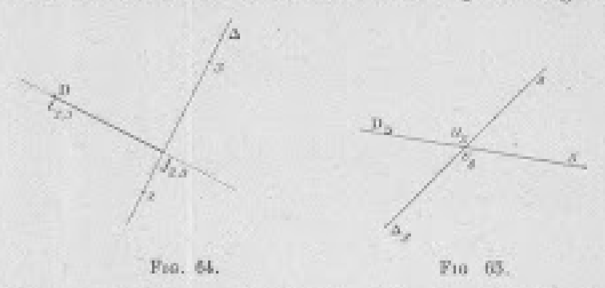


Fig. 64. Fig 65.

2e **Cas.** — *Les deux droites* D, Δ *sont horizontales* (*fig.* 65).

La perpendiculaire commune est verticale; sa projection est réduite à un point, lequel se trouve nécessairement à la rencontre des projections D, Δ.

La plus courte distance des deux horizontales données est égale à la différence de leurs cotes.

71. Exercice. — *Perpendiculaire commune à deux droites dont les projections sont parallèles.*

Montrer que c'est l'intersection des plans ayant les droites données pour échelles de pente (faire l'épure).

ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES PAR LA MÉTHODE DES DEUX PROJECTIONS

LIVRE I
LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE I. — LE POINT

§ 1. — PLANS DE PROJECTIONS. ÉPURE DU POINT

72. — Soit deux plans perpendiculaires, l'un horizontal appelé **plan horizontal de projection**, l'autre vertical appelé **plan frontal** (1) **de projection** (fig. 66), et *xy* leur intersection. Soit M un point quelconque de l'espace, *m* et *m'* ses projections sur les plans H et F; le

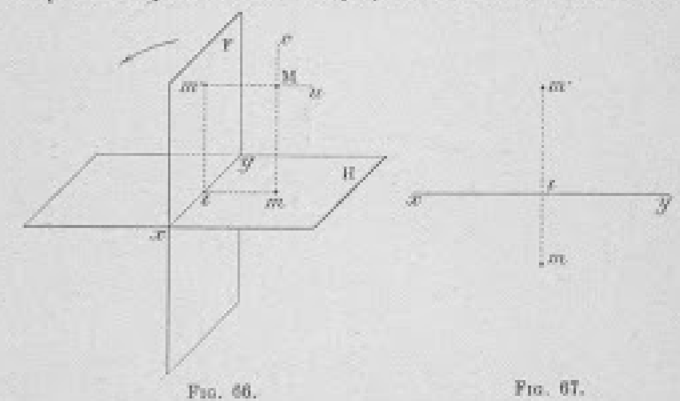


Fig. 66. Fig. 67.

plan *m*M*m'*, défini par deux droites respectivement perpendiculaires aux plans H et F, est perpendiculaire à chacun de ces plans; il l'est

1. Terme adopté par l'Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement secondaire.

aussi à leur intersection xy et les coupe suivant les droites im, im' perpendiculaires à xy. L'angle rectiligne mim' est droit et le quadrilatère $Mmim'$ est un rectangle.

Rabattons le plan F sur le plan H dans un *sens* qui sera précisé plus loin. La figure plane ainsi obtenue s'appelle **épure du point M** (fig. 67); sur l'épure, les droites im, im' perpendiculaires à xy au même point sont confondues.

Toute droite d'une épure perpendiculaire à xy s'appelle **ligne de rappel.**

73. — Inversement, prenons sur une épure deux points m, m' situés sur une même ligne de rappel, plions cette épure le long de xy de manière à reconstituer le dièdre droit HxyF, et examinons si les perpendiculaires mv au plan H et $m'u$ au plan F sont concourantes. Les droites im, im' perpendiculaires à xy définissent un plan perpendiculaire à xy. Ce plan est donc perpendiculaire au plan H et au plan F et il contient les droites mv, $m'u$ perpendiculaires à chacun de ces plans. Ces deux droites sont ainsi dans le même plan et ne peuvent pas être parallèles, sinon les plans H et F le seraient; elles se coupent donc en un point M défini sur l'épure par ses projections m, m'.

En résumé, on aboutit au théorème suivant :

74. Théorème. — *Pour que deux points m, m' d'une épure soient les projections d'un point M de l'espace, il faut et il suffit qu'ils soient sur la même ligne de rappel.*

§ 2. — DÉFINITIONS

75. — La droite xy s'appelle **ligne de terre.** La position des lettres une fois choisie ne devra plus être changée.

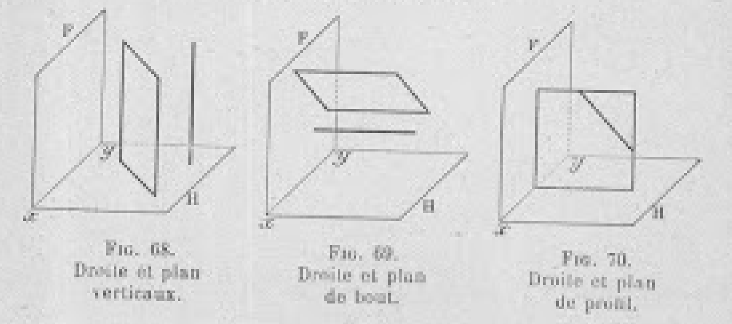


Fig. 68. Droite et plan verticaux.

Fig. 69. Droite et plan de bout.

Fig. 70. Droite et plan de profil.

76. — Une droite ou un plan perpendiculaires :

au plan horizontal de projection sont dits **verticaux** (fig. 68)

au plan frontal de projection sont dits **de bout** (fig. 69)

à xy sont dits **de profil** (fig. 70).

Ainsi, sur la figure 66, la droite Mm est une droite verticale;

— — Mm' — de bout;

le plan $Mmim'$ est un plan de profil.

77. — Le point d'intersection d'une droite D et d'un plan de projection, ou la droite d'intersection d'un plan P et d'un plan de projection, s'appellent **traces** de cette droite D ou de ce plan P.

Ainsi, sur la figure 66 :

le point m est la trace horizontale de la verticale de M;

le point m' est la trace frontale de la droite de bout de M;

la droite im est la trace horizontale du plan $Mmim'$;

la droite im' est la trace frontale du plan $Mmim'$.

78. — Tout point d'un plan vertical a sa projection horizontale sur la trace horizontale du plan (GE, 84).

Tout point d'un plan de bout a sa projection frontale sur la trace frontale du plan (GE, 84).

79. Dièdres de projection. — Le plan H partage l'espace en deux régions appelées, l'une **région supérieure**, l'autre **région**

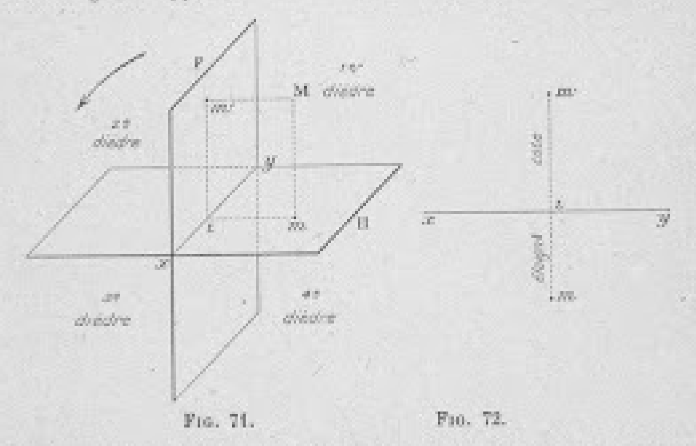


Fig. 71. Fig. 72.

inférieure. Le plan F partage l'espace en deux régions; on appelle **région en avant** du plan F la région dans laquelle doit se placer un observateur debout sur le plan H et regardant le plan F pour avoir x

à sa gauche, y à sa droite; l'autre région est dite **en arrière** du plan F. Les quatre dièdres formés sont numérotés comme la figure 71 l'indique.

Le 1[er] est au-dessus de H, en avant de F.
Le 2[e] — de H, en arrière de F.
Le 3[e] est au-dessous de H, en arrière de F.
Le 4[e] — de H, en avant de F.

80. — Sens du rabattement du plan F sur le plan H.

C'est celui qui amène la partie supérieure du plan F sur la partie arrière du plan H. Tout se passe comme si l'observateur avançait vers le plan F et poussait devant lui ce plan de manière à le rabattre sur le plan H.

81. — Cote et éloignement.

I. — On appelle **cote** d'un point M le nombre algébrique ayant :

1° Pour valeur absolue la distance mM du point au plan horizontal.

2° Pour signe : + si M est au-dessus du plan horizontal,
— s'il est au-dessous.

II. — On appelle **éloignement** d'un point M, le nombre algébrique ayant :

1° pour valeur absolue la distance $m'M$ du point au plan frontal;
2° pour signe : + si le point M est en avant du plan frontal,
— s'il est en arrière.

Pour retrouver ces grandeurs sur l'épure, remarquons d'abord que $imMm'$ est un rectangle de sorte que

$$mM = im' \qquad m'M = im.$$

Région au-dessus de xy
Cote positive
x y
Région au-dessous de xy
Cote négative

Fig. 73.
Examen de la
projection **frontale.**

Région en arrière de xy
Éloignement négatif
x y
Région en avant de xy
Éloignement positif

Fig. 74.
Examen de la
projection horizontale.

Rappelons ensuite que l'épure provient de la superposition des plans H et F.

Si on y considère séparément le plan F (en supposant, pour plus de commodité, l'épure placée verticalement) et le plan H (en supposant, pour plus de commodité, l'épure placée horizontalement), la cote im' et l'éloignement im sont comptés comme l'indiquent les figures 73 et 74.

§ 3. — ÉPURE DU POINT DANS SES DIFFÉRENTES POSITIONS

82. I. Épure d'un point de chaque dièdre. — La figure 75 montre les points A, B, C, D respectivement placés

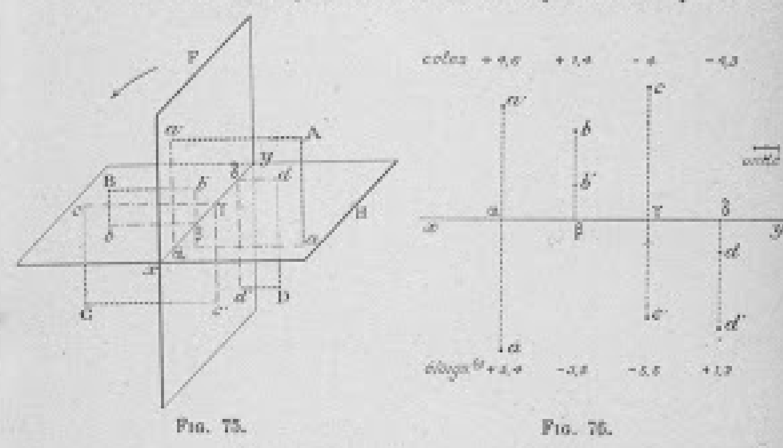


Fig. 75. Fig. 76.

dans le 1[er], le 2[e], le 3[e] et le 4[e] dièdres. On en déduit aisément les épures correspondantes (fig. 76); les cotes se lisent sur la projection frontale; les éloignements, sur la projection horizontale.

83. II. Épures des points situés dans les plans de projection. — C'est un cas particulier du précédent. La figure 77 montre les positions des points E, G, K, L dans l'espace. Les épures correspondantes sont sur la figure 78.

Règle. — *Pour qu'un point appartienne*

au plan horizontal de projection, il faut et il suffit que sa projection frontale soit sur xy	*au plan frontal de projection, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit sur xy.*

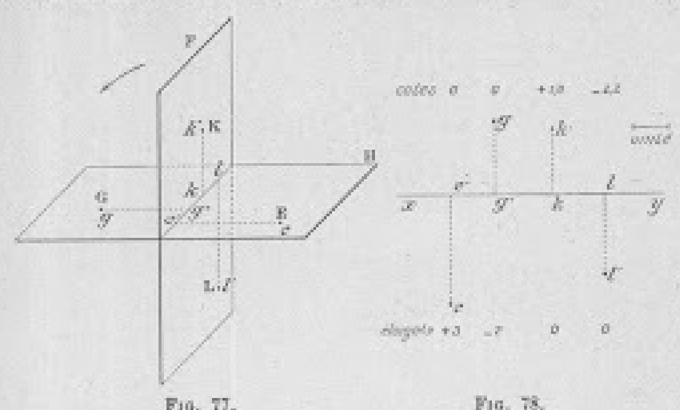


Fig. 77. Fig. 78.

84. III. Épures des points des bissecteurs des dièdres. — C'est un cas particulier du 1er cas. Il suffit d'imaginer que, sur la figure 75, chacun des points A, B, C, D a une cote et un éloignement égaux en valeur absolue. Les épures correspondantes sont sur la figure 79.

Points du 1er bissect. Points du 2e bissect.

Fig. 79.

On appelle :

premier bissecteur le bissecteur des 1er et 3e dièdres;

deuxième bissecteur le bissecteur des 2e et 4e dièdres.

Règle : *Pour qu'un point soit :*

1° *dans le 1er bissecteur, il faut et il suffit que ses projections soient symétriques par rapport à xy.*

2° *dans le 2e bissecteur, il faut et il suffit que ses projections soient confondues.*

85. Exercices. — 1° Prendre sur l'épure un point arbitraire; mesurer sa cote, son éloignement et indiquer (sans faire la figure de l'espace) sa position par rapport aux plans de projection.

2° Construire les projections d'un point dont on donne la cote, l'éloignement et la ligne de rappel.

3° Construire la projection frontale d'un point dont on donne la projection horizontale et la cote.

86. Coordonnées graphiques d'un point. — Lorsqu'on donne l'éloignement et la cote d'un point aa', sa position est déterminée si on connait le pied α de son plan de profil. Choisissons sur xy une origine O et un sens positif, de x vers y par exemple. Le point α sera défini par son abscisse $\overline{O\alpha}$, qu'on appelle aussi abscisse du point considéré aa'.

Les coordonnées graphiques du point aa' sont :

son abscisse $\overline{O\alpha}$; son éloignement $\overline{\alpha a}$; sa cote $\overline{\alpha a'}$.

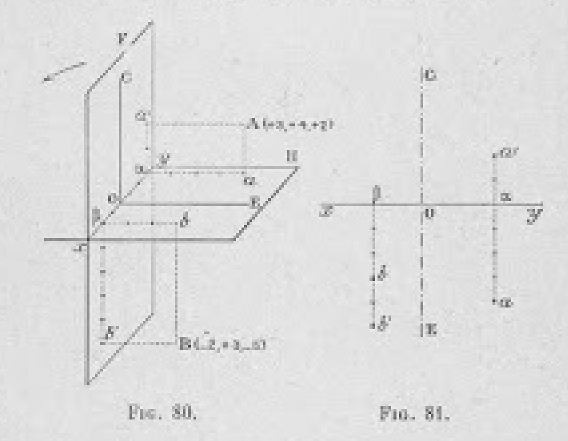


Fig. 80. Fig. 81.

Sur la figure 80 et sur l'épure correspondante 81, on a représenté un point A ayant pour coordonnées $+3, +4, +2$

— B — — $-2, +3, -5$.

Les axes de coordonnées correspondants sont Oy, OE, OC; (ces deux derniers axes sont portés par les traces du plan de profil du point O).

§ 4. — CHANGEMENT DE PLAN FRONTAL

87. — Pour mieux connaître la forme d'un objet, il est souvent commode d'en construire une 2ᵉ projection frontale.

Soit F_1 le nouveau plan frontal (fig. 82), défini sur l'épure par sa trace horizontale x_1y_1 qui est aussi la ligne de terre de la nouvelle épure (fig. 83).

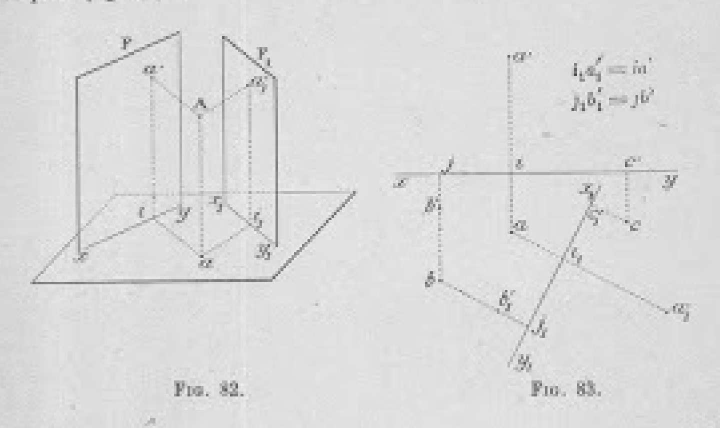


Fig. 82. Fig. 83.

Considérons les projections a, a' d'un point A dans l'épure initiale (ligne de terre xy), et cherchons les projections de ce point dans la nouvelle épure (ligne de terre x_1y_1). Puisque le plan horizontal reste invariable :

1° *la projection horizontale de* A *ne change pas* ; c'est encore a ;

2° *la cote de* A *ne change pas* ; c'est encore $\overline{aA}$ ou $\overline{ia'}$.

On est ramené à un problème déjà étudié : construire la projection frontale a' d'un point A connaissant sa projection horizontale a et sa cote $\overline{ia'}$.

Il convient de veiller à ce que les vecteurs $\overrightarrow{ia'}$, $\overrightarrow{i_1a'_1}$ soient respectivement de même sens par rapport à xy et x_1y_1 : tous deux au-dessus ou tous deux au-dessous (ces orientations étant prises en plaçant x ou x_1 à gauche, y ou y_1 à droite).

88. Exercices. — *Les plans de projection et leurs bissecteurs forment 8 dièdres d'un demi-droit; un point étant donné par ses projections, trouver sa position par rapport à ces dièdres.*

Prenons comme nouveau plan frontal x_1y_1 un plan de profil; il donne le rectiligne de tous ces dièdres; nous les distinguerons en les désignant par 1, 1', 2, 2' ....

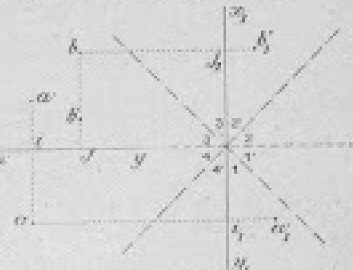


Fig. 84.

La figure 84 montre que :

le point aa' (ou aa'_1) est dans le dièdre 1.

le point bb' (ou bb'_1) est dans le dièdre 2'.

89. — *Un point A tourne uniformément autour de xy en même temps que son plan de profil se déplace uniformément dans le sens xy. Construire quelques projections de ce point.*

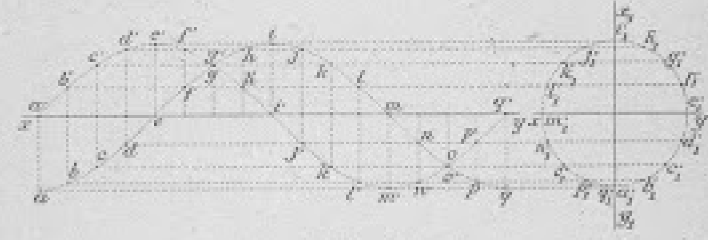


Fig. 85.

Appliquer la même méthode que dans l'épure précédente; on retrouve (fig. 85), se succédant d'une manière continue, toute les formes particulières d'épure du point signalées antérieurement [1].

1. On démontre aisément que chaque projection décrit une sinusoïde. Dans l'espace, le point M décrit une hélice.

CHAPITRE II. — LA DROITE

§ 1. — DÉTERMINATION D'UNE DROITE SUR UNE ÉPURE

90. — On a démontré en géométrie (GE. 89) que :
La projection d'une droite sur un plan est en général une droite; il y a exception pour les droites perpendiculaires au plan : leur projection est réduite à un point.

91. — Plans projetants et projections d'une droite.

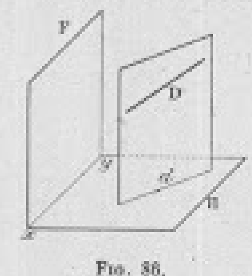


Fig. 86.

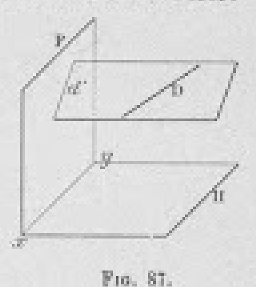


Fig. 87.

Par une droite donnée D, il passe en général :

Un plan vertical et un seul qui est le lieu des verticales projetant horizontalement les points de la droite sur le plan horizontal (fig. 86); la trace horizontale *d* de ce plan est la projection horizontale de la droite donnée D.

Il n'y a exeption que quand cette droite est elle-même verticale (fig. 88); tous les plans qui la contiennent sont verticaux; sa projection horizontale se réduit à un point.

Un plan de bout et un seul qui est le lieu des droites de bout projetant les points de la droite sur le point frontal (fig. 87); la trace frontale *d'* de ce plan est la projection frontale de la droite donnée D.

Il n'y a exception que quand cette droite est elle-même de bout (fig. 89); tous les plans qui la contiennent sont de bout; sa projection frontale se réduit à un point.

Étudions d'abord ces deux cas d'exception, de manière à faciliter les discussions ultérieures.

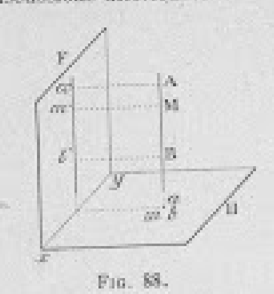


Fig. 88.

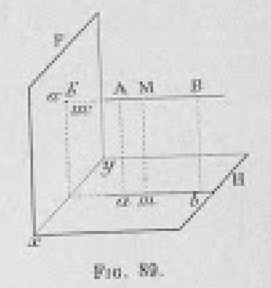


Fig. 89.

92. Cas particulier. — Droite perpendiculaire à un plan de projection.

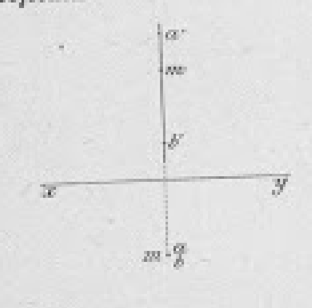


Fig. 90.

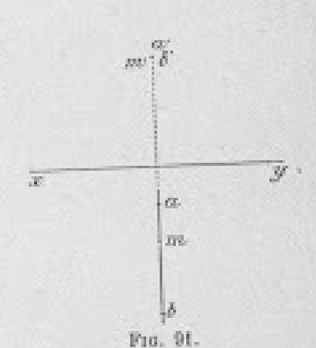


Fig. 91.

Soit *aa'*, *bb'* deux points d'une verticale (fig. 90); nous voyons que :

1° la projection horizontale *ab* d'une verticale est réduite à un point;

2° la projection frontale *a'b'* d'une verticale est perpendiculaire à *xy*;

3° pour qu'un point *mm'*

Soit *aa'*, *bb'* deux points d'une droite de bout (fig. 91); nous voyons que :

1° la projection frontale *a'b'* d'une droite de bout est réduite à un point;

2° la projection horizontale *ab* d'une droite de bout est perpendiculaire à *xy*;

3° pour qu'un point *mm'*

appartienne à une verticale ab $a'b'$ il faut et il suffit que m soit au point ab.

Le plan projetant une verticale :

1° sur le plan frontal est de profil ;

2° sur le plan horizontal est indéterminé.

appartienne à une droite de bout, il faut et il suffit que m' soit au point $a'b'$.

Le plan projetant une droite de bout :

1° sur le plan horizontal est de profil ;

2° sur le plan frontal est indéterminé.

93. — Détermination d'une droite quelconque par ses deux projections.

Nous supposons que la droite donnée n'est perpendiculaire à aucun plan de projection ou, ce qui revient au même, que ses deux projections sont des droites (fig. 92 et 93).

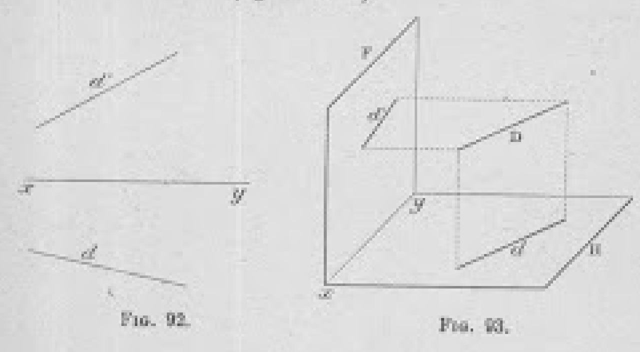


Fig. 92. Fig. 93.

Chaque projection d, d' définit un plan projetant et l'intersection de ces plans donne la droite D correspondante.

Discussion. — Il n'y a exception que si les deux plans projetants sont parallèles ou confondus. Ils ne peuvent pas être parallèles puisqu'ils ont en commun la droite D. Chacun d'eux étant perpendiculaire à l'un des plans de projection, ils ne peuvent être confondus que s'ils sont perpendiculaires à xy, autrement dit de profil. Le seul cas d'exception est donc celui d'une droite de profil (droite orthogonale à xy). On aboutit ainsi à l'énoncé suivant :

94. Théorème. — *Une droite est en général définie par ses deux projections.*

Il y a exception pour les droites de profil qui doivent être définies au moyen de deux points (fig. 94).

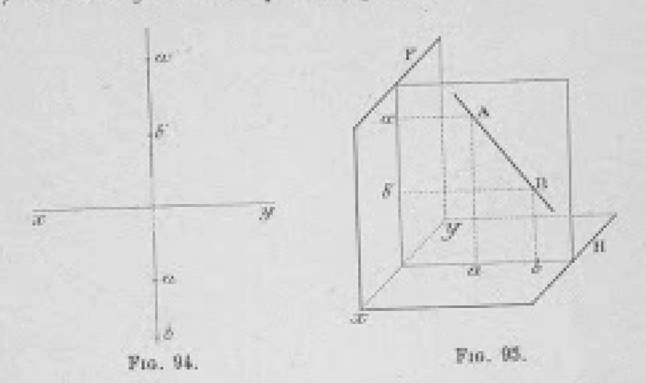


Fig. 94. Fig. 95.

95. — Si nous laissons de côté les cas particuliers déjà étudiés des verticales et des droites de bout, lesquelles sont également de profil, nous retiendrons de la discussion précédente que :

1° *les deux plans projetant une droite de profil sont confondus en un même plan de profil* (fig. 95) ;

2° *les deux projections d'une droite de profil sont perpendiculaires à xy au même point* (fig. 94).

96. — Exercice. — L'une des projections d'une droite est perpendiculaire à xy ; que peut-on dire :

1° de ses plans projetants ?

2° de l'autre projection ?

3° de la droite dans l'espace ?

97. Changement de plan frontal pour une droite. — Il s'effectue en appliquant aux deux points qui définissent la droite les deux principes déjà énoncés :

1° les projections horizontales ne changent pas ;

2° les cotes ne changent pas (fig. 96).

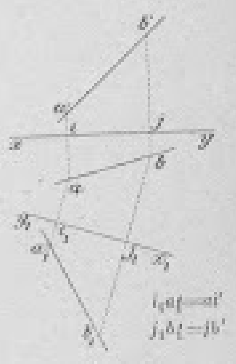


Fig. 96.

98. Problème. — *Une droite est définie par deux points aa', bb' ; on donne l'une des projections d'un point mm' de cette droite ; trouver l'autre projection.*

Rappelons d'abord que ce problème est indéterminé si on donne la projection horizontale d'un point d'une verticale ou la projection frontale d'un point d'une droite de bout.

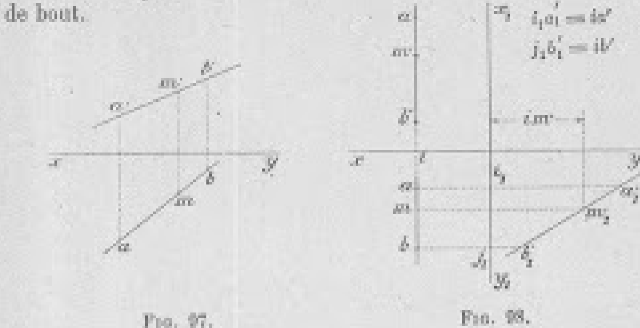


Fig. 97. Fig. 98.

1re épure (fig. 97). — On donne, par exemple, la projection horizontale m; la projection frontale m' doit se trouver d'une part sur la ligne de rappel de m et d'autre part sur la projection frontale $a'b'$ de la droite. La discussion du n° 93 montre que dans le cas général ces droites se rencontrent et le problème admet une solution. On aboutit ainsi à la règle :

98 *bis*. Règle. — *Pour qu'un point appartienne à une droite, il faut et en général il suffit que chaque projection du point soit sur la projection de même nom de la droite.*

2e épure (fig. 98). La droite est de *profil*; on donne la projection frontale m'. Changer le plan frontal; chercher sur la nouvelle épure le point de la droite qui a pour cote im'; revenir à l'épure initiale.

99. Application. — Trouver sur une droite définie par deux points aa', bb', le point de cote donnée ou d'éloignement donné.

On ramène aisément ce problème au précédent.

100. Construction des traces d'une droite. — Nous avons déjà appelé ainsi les points d'intersection U et V d'une droite avec les plans de projection.

Une droite non parallèle à un plan de projection possède deux traces U, V; ces deux points sont :

distincts quand la droite ne rencontre pas xy (fig. 99);

confondus quand la droite rencontre xy (fig. 101).

Remarquons que la trace horizontale d'une droite dd' (fig. 100) a

une cote nulle : sa projection frontale u' est donc sur xy et, par suite, à la rencontre de xy avec d'. On rappelle ensuite u' en u.

Même méthode pour construire la trace frontale vv'.

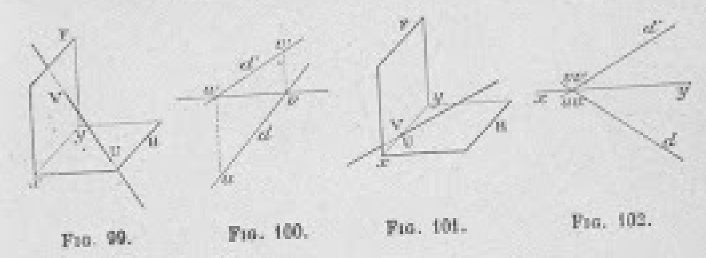


Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101. Fig. 102.

101. — Si la droite donnée dd' *rencontre* xy (fig. 102) les traces uu', vv' sont confondues au point de rencontre.

102. — Si la droite donnée $aba'b'$ est **de profil**, on utilise un changement de plan frontal (fig. 103). Il n'y a rien de changé pour la recherche du point uu_1' ou uu' qui est trace horizontale dans chacune des deux épures. Par contre, le point vv' n'est trace frontale que par rapport au plan frontal initial; sa projection horizontale v est connue; on la rappelle en v_1' et on revient à l'épure initiale.

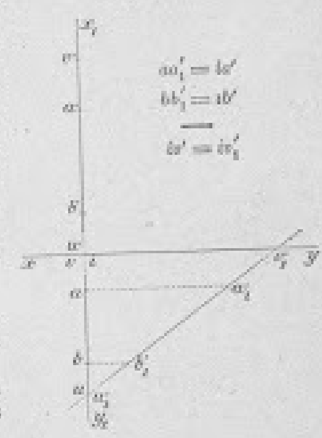


Fig. 103.

103. Exercices. — I. *Étudier les positions d'une droite DD' par rapport aux plans de projection.*

On construit les traces; elles limitent les régions comprises dans les différents dièdres de projection.

Sur les figures 104, nous avons pontué la droite en supposant :

1° les deux plans de projection opaques;

2° la projection frontale vue par un observateur situé sur le plan horizontal de projection, très loin en avant de xy;

3° la projection horizontale vue par un observateur situé dans le plan frontal très loin au dessus de xy.

Les parties vues par cet observateur sont en trait plein, les parties cachées en pointillé (petits ronds).

II. — *Traces d'une droite DD' sur les plans bissecteurs* (fig. 105).

La réponse est immédiate pour le 2e bissecteur : la droite DD' le ren

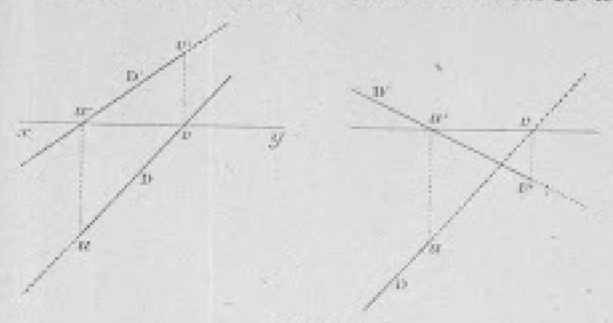


FIG. 104.

contre au point bb' dont les deux projections sont au point de rencontre de D et D' (Expliquer pourquoi).

Pour obtenir le point aa' où DD' perce le 1er bissecteur, on prend la

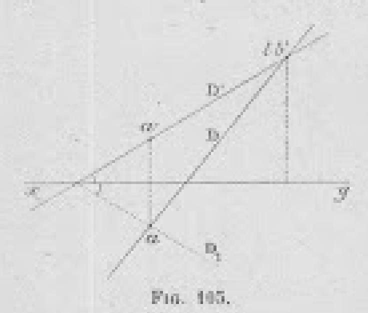


FIG. 105.

droite D_1 symétrique de D' par rapport à xy ; elle rencontre D en a, que l'on rappelle en a'. (A expliquer).

Chacune de ces constructions donne aisément la condition de parallélisme d'une droite avec le 1er ou avec le 2e bissecteur. (A terminer).

§ 2. — DROITES REMARQUABLES

104. Horizontale (fig. 106).

On appelle ainsi une droite parallèle au plan horizontal de projection.

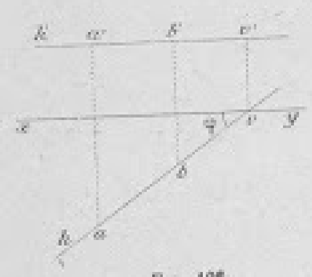


FIG. 106.

Pour qu'une droite soit horizontale, il faut et il suffit :

que deux de ses points aient la même cote ;

autrement dit, que sa projection frontale soit parallèle à xy.

Exceptionnellement, sa projection frontale peut être réduite à un point ; cette horizontale prend alors la position particulière de droite de bout.

Une horizontale n'a pas de trace horizontale. La recherche de la trace frontale ne présente rien de particulier.

Remarquons que :

1° le segment ab est égal au segment AB de l'espace ;

104bis. Droite de front (*ou frontale*) (fig. 107).

On appelle ainsi une droite parallèle au plan frontal de projection.

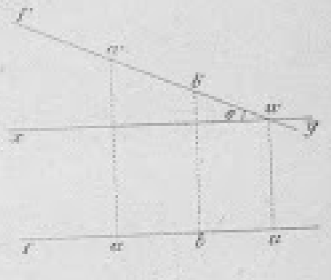


FIG. 107.

Pour qu'une droite soit de front, il faut et il suffit :

que deux de ses points aient le même éloignement ;

autrement dit, que sa projection horizontale soit parallèle à xy.

Exceptionnellement, sa projection horizontale peut être réduite à un point ; cette frontale prend alors la position particulière de verticale.

Une frontale n'a pas de trace frontale. La recherche de la trace horizontale ne présente rien de particulier.

Remarquons que :

1° le segment $a'b'$ est égal au segment AB de l'espace ;

2° l'angle φ est égal à l'angle de la droite AB avec le plan frontal de projection.

2° l'angle θ est égal à l'angle de la droite AB avec le plan horizontal.

105. Exercice. — *Rendre une droite ab a'b' de front par un changement de plan frontal (fig. 108).*

On prend la nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à la projection horizontale *ab* de la droite. Cette épure donne en même temps :

1° la longueur $a'_1\ b'_1$ du segment AB de l'espace

2° l'angle θ de la droite donnée avec le plan horizontal.

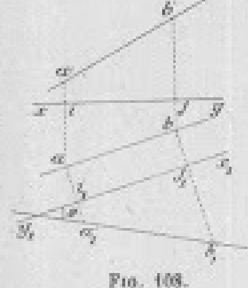


Fig. 108.

Fig. 109.

Revoir les épures 98 et 103 sur lesquelles la droite de profil *aba'b'* a été rendue de front.

106. Droite verticale. — Droite de bout.

Ces droites ont déjà été définies et étudiées antérieurement. Ce sont respectivement des positions particulières d'une frontale et d'une horizontale.

107. — Autres droites particulières.

Droite parallèle à *xy* : à la fois horizontale et de front ; n'a aucune trace (faire l'épure).

Droite de profil : orthogonale à *xy* ; déjà étudiée.

Droite du 1er ou du 2e bissecteur : la définir par deux points du bissecteur considéré (fig. 109) ; ses deux projections sont : ou bien symétriques par rapport à *xy*, ou bien confondues (nécessaire et suffisant).

§ 3. — DROITES CONCOURANTES

Proposons-nous de reconnaître si deux droites données sur une épure sont concourantes.

108. — Un premier cas particulier, où la réponse est immédiate,

est celui où **les droites données DD', ΔΔ' (non de profil) ont deux projections de même nom confondues.** Supposons par exemple qu'elles aient même projection frontale (fig. 110). Elles sont dans un même plan, le plan de bout qui les projette sur le plan frontal ; d'autre part, elles ne sont pas parallèles sinon leurs projections horizontales le seraient ; elles sont donc concourantes.

Leur point commun est *mm'*.

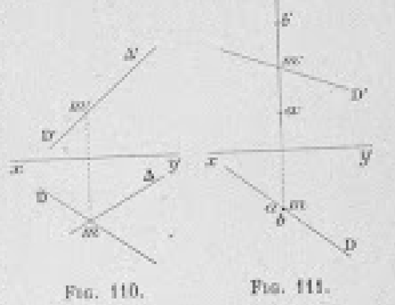


Fig. 110. Fig. 111.

109. — Supposons maintenant l'une des droites données **perpendiculaire à un plan de projection**, par exemple verticale (fig. 111) ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point *mm'* appartienne à cette verticale est que *m* soit au point *ab* ; donc :

Pour qu'une droite DD' rencontre une verticale aba'b', il faut et il suffit que sa projection horizontale D passe par le point ab projection horizontale de la verticale.

Le point commun est *mm'*.

Si l'une des droites est de bout, on lui applique le raisonnement et la règle corrélatifs.

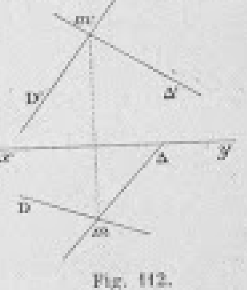


Fig. 112.

110. — Abordons maintenant le **cas général.** Les deux droites DD', ΔΔ' (fig. 112) seront concourantes s'il existe un point *mm'* situé à la fois sur chacune d'elles ; or, pour qu'un point *mm'* appartienne à une droite **quelconque**, DD' par exemple, il faut et il suffit que chaque projection du point soit sur la projection de même nom de la droite, *m* sur D, *m'* sur D' (98bis) ; on aboutit ainsi à l'énoncé suivant :

Règle. — *Pour que deux droites non de profil, soient concourantes, il faut et il suffit que leurs projections de même nom se coupent et que les deux points communs soient sur une même ligne de rappel.*

111. Cas où l'une des droites données est de profil. — Laissons de côté le cas particulier où cette droite de profil serait verticale ou de bout, déjà étudié au n° 109.

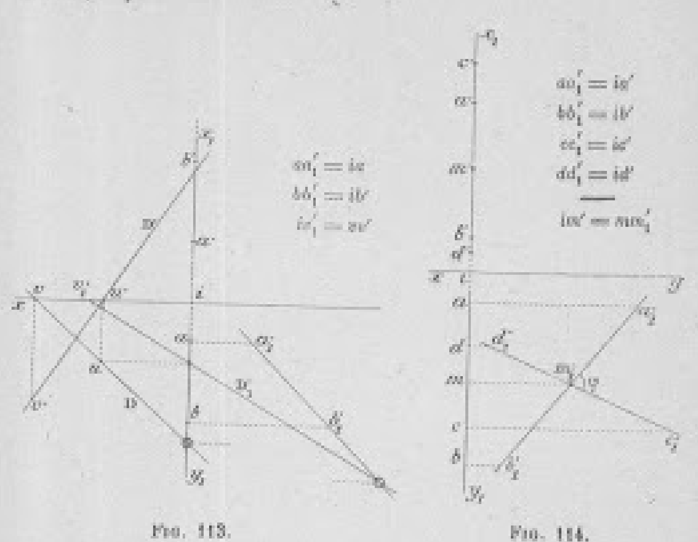


Fig. 113. Fig. 114.

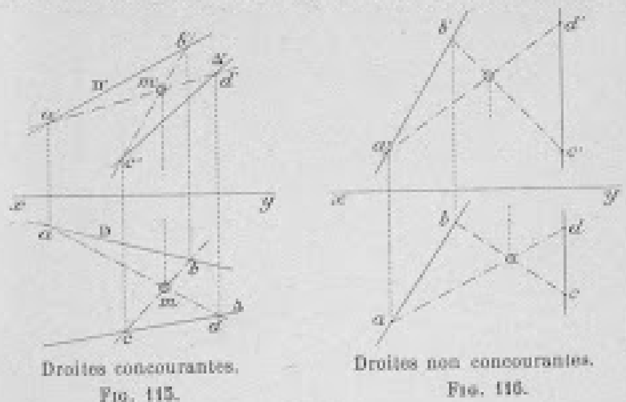
La méthode consiste à revenir au cas général par un changement de plan frontal. Sur la figure 113 la droite DD′ est quelconque et la droite ab, $a'b'$ de profil; le tracé montre qu'elles ne sont pas concourantes.

Sur la figure 114, les deux droites données $aba'b'$ et $cdc'd'$ sont de profil. Étant dans le même plan de profil, elles ne peuvent être que concourantes ou parallèles. L'épure montre qu'elles sont concourantes. Remarquons qu'elle donne également leur angle, φ.

112. Exercice. — *Soit deux droites DD′, ΔΔ′ dont les projections de même nom se coupent en dehors de l'épure* (fig. 115). *Examiner si elles sont concourantes.*

Prenons sur la droite DD′ deux points aa', bb', sur la droite ΔΔ′ deux points cc', dd' et traçons les droites $ada'd'$, $bcb'c'$. Les deux droites données ne sont pas parallèles puisque leurs projections de même nom ne le sont pas (GE, 91) il en est de même pour les deux droites auxiliaires; par suite, si les droites de l'un des couples sont concourantes, les quatre droites sont dans le même plan et les droites de l'autre couple sont

nécessairement concourantes. On est donc ramené à examiner si les droites $ada'd'$, $bcb'c'$ sont concourantes ce qui est graphiquement possible



Droites concourantes.
Fig. 115.

Droites non concourantes.
Fig. 116.

pourvu qu'on ait soin de placer les projections de même nom de manière qu'elles se coupent à l'intérieur de l'épure.

Remarque. — Ce procédé peut encore être appliqué au cas de deux droites dont l'une est de profil et l'autre quelconque (fig. 116).

113. — Exercices de constructions de droites.

I. — *Mener par un point aa' une horizontale rencontrant une droite donnée DD′.* Voir la figure 117; la droite demandée est az $a'z'$.

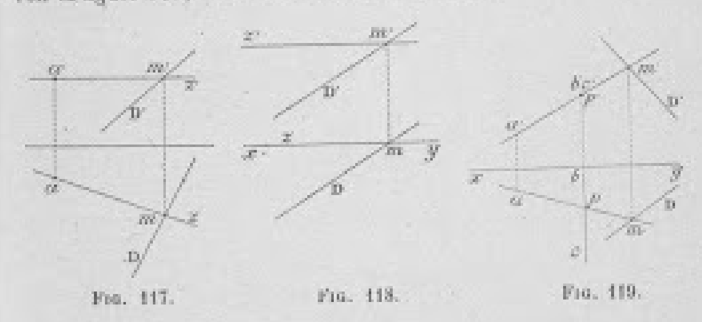


Fig. 117. Fig. 118. Fig. 119.

II. — *Mener dans le plan frontal de projection une parallèle à xy rencontrant une droite donnée DD′.*

Le point de rencontre est la trace frontale mm' de DD′ (fig. 118). La droite cherchée est mz, $m'z'$.

III. — *Construire une droite issue d'un point aa', s'appuyant sur une droite de bout $bcb'c'$ et sur une droite quelconque DD′.*

On connaît immédiatement la projection frontale $a'p'$ de la droite cherchée (fig. 119) ou termine en rappelant le point m' de rencontre de $a'p'$ et D'.

§ 4. — DROITES PARALLÈLES

114. — Si deux droites sont parallèles, leurs projections de même nom sont nécessairement parallèles (GE, 91 ; intersections de deux plans parallèles par un troisième).

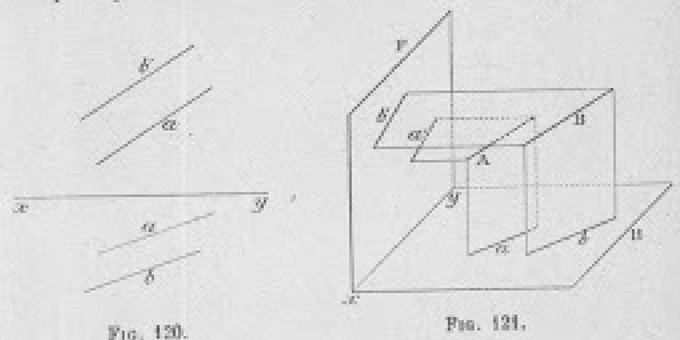


Fig. 120. Fig. 121.

Inversement, considérons deux droites définies par leurs projections a et a', b et b' (donc, non de profil) et dont les projections de même nom sont parallèles : $a /\!/ b$, $a' /\!/ b'$ (fig. 120). Les plans projetant ces deux droites sur le plan horizontal, par exemple, (fig. 121) sont parallèles comme définis par deux couples de droites concourantes parallèles chacune à chacune : a et b d'une part, deux verticales d'autre part. Chacun des plans projetants qui définissent B est donc parallèle à A (comme parallèle à un plan projetant de A) ; leur intersection B est donc parallèle à A.

En résumé :

115. Théorème. — *Pour que deux droites non de profil soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections de même nom soient parallèles.*

On ramène le cas des droites de profil au cas général par un changement de plan frontal (fig. 122).

116. Exercice. — Démontrer l'énoncé suivant : Pour que deux vecteurs soient équipollents, il faut et il suffit que leurs projections de même nom soient des vecteurs équipollents.

117. Problème. — *Mener d'un point donné mm' la parallèle à une droite donnée.*

Si la droite donnée n'est pas de profil et est définie par ses projections d, d' (fig. 123) on trace mz parallèle à d, $m'z'$ parallèle à d' ; mz et $m'z'$ sont les projections de la droite demandée.

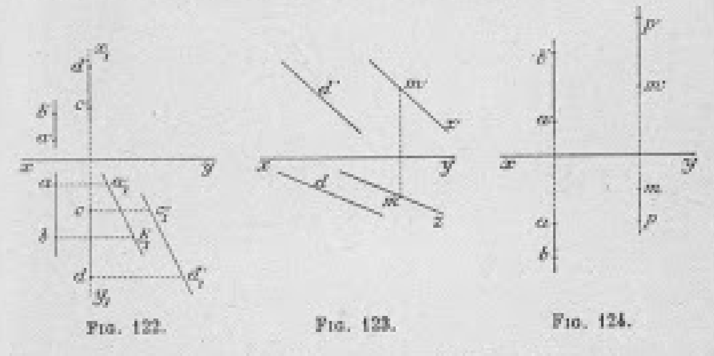


Fig. 122. Fig. 123. Fig. 124.

Si la droite donnée $aba'b'$ est de profil (fig. 124), on trace mp équipollent à ab, $m'p'$, équipollent à $a'b'$; $mpm'p'$ est la parallèle cherchée.

118. — Problèmes de constructions de droites.

I. — *Construire une parallèle à une droite donnée* DD' *(non de profil) s'appuyant sur une verticale $aba'b'$ et sur une droite quelconque* ΔΔ'.

On peut tracer immédiatement la projection horizontale de la droite inconnue. Faire l'épure.

II. — *Construire une parallèle à une droite de profil $aba'b'$, s'appuyant sur une parallèle* DD' *à xy et sur une droite quelconque* ΔΔ'.

Prendre un nouveau plan frontal de projection perpendiculaire à DD' (c'est-à-dire de profil dans l'ancienne épure). Sur la nouvelle épure, la droite DD' est de bout (Épure à faire).

119. Exercice. — Étudier les parallèles au 1er ou au 2e bissecteur ; les construire en menant, par un point, une parallèle à une droite de l'un de ces plans (voir n° 107 ; comparer à 103-II).

120. Remarque. — Deux droites qui sont dans un même plan et ont, par exemple, leurs projections horizontales parallèles ne peuvent pas être concourantes ; elles sont donc parallèles dans l'espace ; par suite, leurs projections frontales sont également parallèles.

CHAPITRE III. — LE PLAN

121. — Rappelons qu'on appelle **traces** d'un plan les droites d'intersection de ce plan avec les plans de projection.

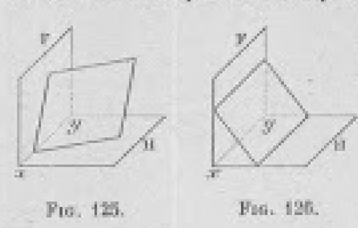


FIG. 125. FIG. 126.

Un plan quelconque (non parallèle à un plan de projection) possède deux traces P, Q qui sont généralement concourantes en un point de xy (fig. 125); elles sont parallèles à xy (et entre elles) quand le plan donné est parallèle à xy (fig. 126).

122. Représentation d'un plan. — On peut définir un plan sur une épure de la même manière que dans l'espace :

1° par deux droites concourantes;
2° par une droite et un point extérieur;
3° par trois points non en ligne droite;
4° par deux droites parallèles.

Ces différents procédés se ramènent aisément les uns aux autres.

Le premier est graphiquement le plus commode et sera désormais systématiquement employé (fig. 127). Il comporte une variante importante, consistant à représenter un plan par ses traces supposées concourantes (fig. 128). On énonce ce plan PαQ′.

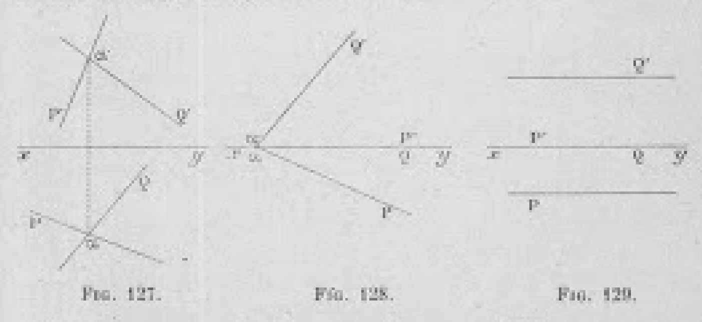


FIG. 127. FIG. 128. FIG. 129.

Dans le cas exceptionnel où un plan est parallèle à xy, on peut encore le représenter par ses traces, qui sont alors toutes deux parallèles à xy (fig. 129).

§ 1. — PLANS REMARQUABLES

123. — L'application de ce procédé de représentation aux cas particuliers suivants est immédiate, ainsi que la solution des problèmes relatifs à la détermination des éléments (points, droites) contenus dans ces plans.

124. Plan vertical : plan perpendiculaire au plan horizontal de projection (fig. 130).

Plan de bout : plan perpendiculaire au plan frontal de projection (fig. 131).

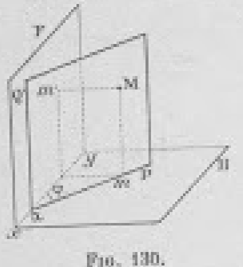




FIG. 130.

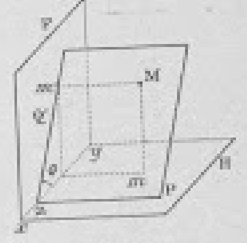


FIG. 131.

Si un plan est vertical, sa trace frontale est verticale (intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième) et, sur l'épure, la trace frontale est perpendiculaire à xy (fig. 132).

Inversement, si la trace frontale d'un plan est perpendiculaire à xy elle est verticale (G. E. 81) et le plan donné, qui la contient, l'est également.

En résumé :

Pour qu'un plan soit vertical, il faut et il suffit que sa trace frontale soit perpendiculaire à xy.

Si un plan est de bout, sa trace horizontale est de bout. (intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième) et, sur l'épure, la trace horizontale est perpendiculaire à xy (fig. 133).

Inversement, si la trace horizontale d'un plan est perpendiculaire à xy, elle est de bout et le plan, qui la contient, l'est également.

En résumé :

Pour qu'un plan soit de bout, il faut et il suffit que sa trace horizontale soit perpendiculaire à xy.

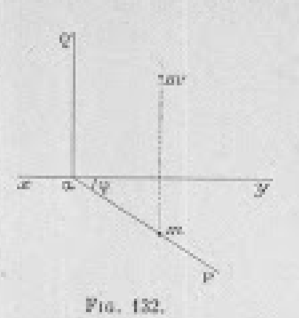


Fig. 132.

Fig. 133.

125. — Pour qu'un point mm' appartienne à un plan vertical, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit sur la trace horizontale αP (GE n° 84).

La trace horizontale d'un plan vertical suffit pour définir ce plan.

126. Remarque. — L'angle φ de la trace horizontale avec xy est égal à l'angle du plan donné avec le plan frontal (il est le rectiligne de leur dièdre).

Pour qu'un point mm' appartienne à un plan de bout, il faut et il suffit que sa projection frontale soit sur la trace frontale $\alpha Q'$.

La trace frontale d'un plan de bout suffit pour définir ce plan.

Remarque. — L'angle θ de la trace frontale avec xy est égal à l'angle du plan donné avec le plan horizontal (il est le rectiligne de leur dièdre).

127. Plan de profil : plan perpendiculaire à xy ; il est à la fois vertical et de bout ; ses traces sont perpendiculaires à xy au même point (fig. 134).

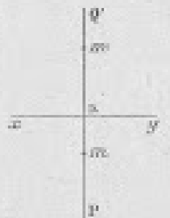


Fig. 134.

128. Plan horizontal : plan parallèle au plan horizontal de projection.

Plan de front (ou frontal) : plan parallèle au plan frontal de projection.

C'est une position particulière d'un plan de bout.

La trace frontale est parallèle à xy (condition nécessaire et suffisante) et il n'a pas de trace horizontale.

C'est une position particulière d'un plan vertical.

La trace horizontale est parallèle à xy (condition nécessaire et suffisante) et il n'a pas de trace frontale.

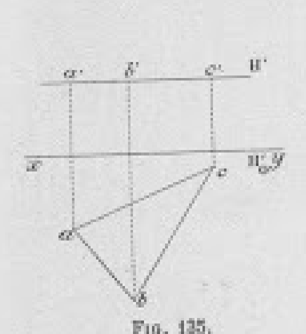


Fig. 135.

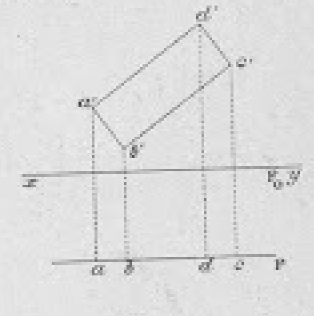


Fig. 136.

129. Remarque. — Toute figure contenue dans un plan horizontal est égale à sa projection horizontale.

Remarque. — Toute figure contenue dans un plan de front est égale à sa projection frontale.

§ 2. — PLAN QUELCONQUE

130. Horizontales, frontales et traces d'un plan. Construction des traces. — Remarquons d'abord que :

Toutes les horizontales d'un plan s'obtiennent en le coupant par des plans horizontaux ; donc :

Théorème. — *Toutes les horizontales d'un plan (et en particulier sa trace horizontale) sont parallèles entre elles* (fig. 137).

Toutes les frontales d'un plan s'obtiennent en le coupant par des plans de front ; donc :

Théorème. — *Toutes les frontales d'un plan (et en particulier sa trace frontale) sont parallèles entre elles* (fig. 138).

131. — Considérons maintenant un plan défini par deux droites concourantes DD′, ΔΔ′ et cherchons à construire ses traces.

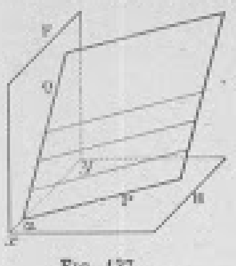


Fig. 137.

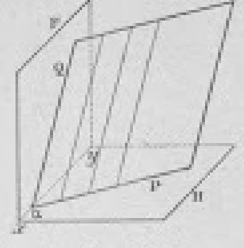


Fig. 138.

1re épure. *Les deux droites données sont quelconques* (fig. 139).

La trace horizontale PP′ du plan contient les traces horizontales de toutes les droites du plan; on l'obtiendra en joignant les traces horizontales *bb*′ et *cc*′ des deux droites données.

On peut opérer de même pour obtenir la trace frontale QQ′, ou observer que le point αα′ où PP′ coupe *xy* appartient aussi à QQ′; la trace frontale de l'une des droites données (de DD′, par exemple) achève de déterminer QQ′.

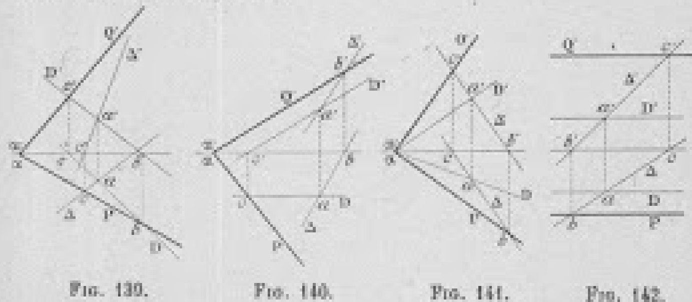


Fig. 139. Fig. 140. Fig. 141. Fig. 142.

2e épure. *L'une des droites données DD′ est de front* (fig. 140).

La trace frontale QQ′ est parallèle à DD′; on achève de la déterminer au moyen du point *bb*′, trace frontale de ΔΔ′; elle rencontre *xy* en un point αα′ qui appartient à la trace horizontale PP′; on achève de déterminer PP′ au moyen du point-trace horizontale de DD′. Si l'une des droites données est horizontale, on exécute le tracé corrélatif (faire l'épure).

3e épure. *L'une des droites données DD′ rencontre xy* (fig. 141).

Ce point de rencontre αα′ appartient à chaque trace; terminer comme précédemment, au moyen des deux points-traces de ΔΔ′.

4e épure. *L'une des droites données DD′ est parallèle à xy* (fig. 142).

Le plan donné et ses deux traces sont parallèles à *xy*; terminer au moyen des deux points-traces de ΔΔ′.

132. Problème fondamental. — *Un plan est défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces* PP′, QQ′; *on donne l'une des projections d'une droite* DD′ *de ce plan; trouver l'autre projection.*

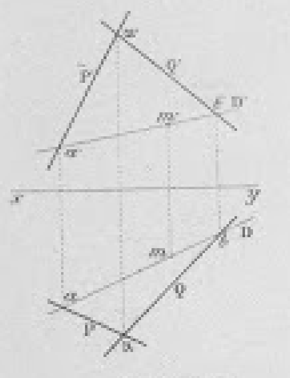


Fig. 143.

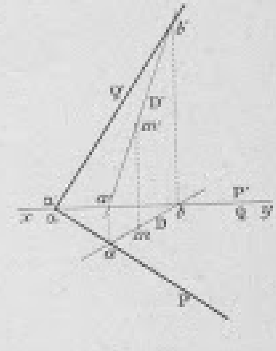


Fig. 144.

Si la projection horizontale D, par exemple, n'est parallèle ni à P ni à Q (fig. 143 et 144) la droite DD′ est concourante avec chacune des droites PP′, QQ′ (120); on rappelle donc en *a*′, *b*′ les points de rencontre *a*, *b* (141); *a*′*b*′ est la projection frontale D′ cherchée.

Si la droite D est parallèle à P, par exemple (fig. 145 et 146), on rappelle en *b*′ son point de rencontre *b* avec Q et on mène par *b*′ la droite D′ parallèle à P′ (120).

Sur la figure 146, la droite DD′ est une horizontale du plan donné.

Sur la figure 147, on a supposé D parallèle à Q; la droite DD′ obtenue est alors parallèle à QQ′; c'est donc une frontale du plan donné.

133. Autre interprétation. — Le problème précédent ne diffère pas du suivant :

Chercher la droite d'intersection d'un plan défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces PP', QQ' avec un plan :

vertical donné par sa trace horizontale D	*de bout donné par sa trace frontale* D'

(c'est-à-dire avec un plan perpendiculaire à un plan de projection).

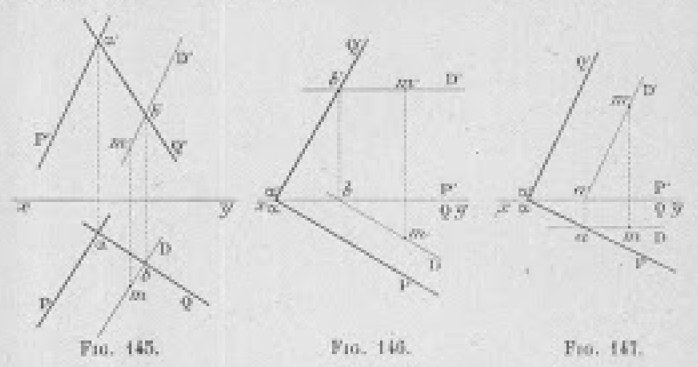


FIG. 145. FIG. 146. FIG. 147.

Nous avons vu en effet que toute figure d'un tel plan, et en particulier la droite d'intersection, se projette :

horizontalement sur la trace horizontale D.	frontalement sur la trace frontale D'.

134. Exercice. — *Prendre une droite dans un plan donné.*

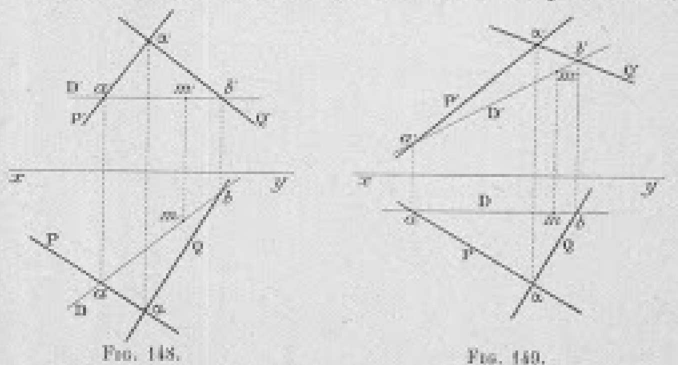


FIG. 148. FIG. 149.

On peut se donner arbitrairement la projection horizontale, par

exemple, de la droite et on en déduit sa projection frontale comme on vient de l'indiquer.

En particulier, c'est ainsi qu'on procède pour prendre une horizontale ou une frontale dans un plan défini par deux droites concourantes (fig. 148 et 149).

On pourra, à titre d'exercice, vérifier graphiquement sur ces deux épures que deux horizontales ou deux frontales d'un même plan sont parallèles.

135. Problème. — *Un plan est défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces; on donne l'une des projections d'un point mm' de ce plan; trouver l'autre projection.*

On fait passer par la projection donnée, m par exemple, une droite D considérée comme la projection horizontale d'une droite DD' du plan; on détermine sa projection frontale D' comme on vient de le dire (fig. 143 à 149). On a alors m' en rappelant.

136. Autre interprétation. — Le problème précédent ne diffère pas du suivant :

Chercher le point d'intersection d'un plan défini par deux droites concourantes quelconques ou par ses traces PP', QQ' avec une droite :

verticale donnée par sa trace horizontale m	*de bout donnée par sa trace frontale m'*

(c'est-à-dire avec une droite perpendiculaire à un plan de projection).

137. Exercice. — *Prendre un point dans un plan donné.*

On peut se donner arbitrairement la projection horizontale, par exemple, du point et on en déduit sa projection frontale comme on vient de l'indiquer.

138. Changement de plan frontal pour un plan. — Si un plan est défini par deux droites concourantes quelconques PP', QQ' (fig. 150) on effectue le changement de plan pour chacune de ces droites en utilisant naturellement leur point commun $\alpha\alpha'$.

Si un plan est défini par ses traces P, Q' (fig. 151), on remarque que la trace horizontale est encore P dans la nouvelle épure; son point de rencontre β_1 avec x_1y_1 appartient à la nouvelle trace frontale; pour en obtenir commodément un 2ᵉ point, on utilise le point aa' de QQ' dont la projection horizontale a est au point de rencontre des lignes de terre. C'est le point commun au plan donné et aux deux plans frontaux de projection. Il appartient aussi à la trace frontale

sur la nouvelle épure. Le plan donné est ainsi défini par ses nouvelles traces : $P\beta_1 R'_1$.

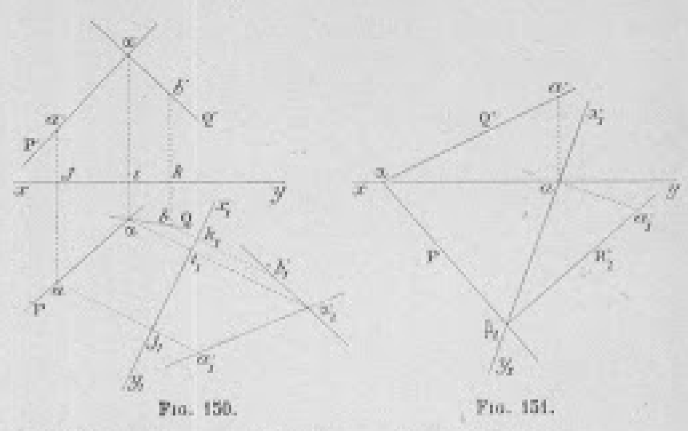


FIG. 150. FIG. 151.

139. Exercices. — 1° *Rendre un plan de bout.*

On prend la nouvelle ligne de terre perpendiculaire à une horizontale du plan (fig. 152) ou à sa trace horizontale (fig. 153). N'importe quel

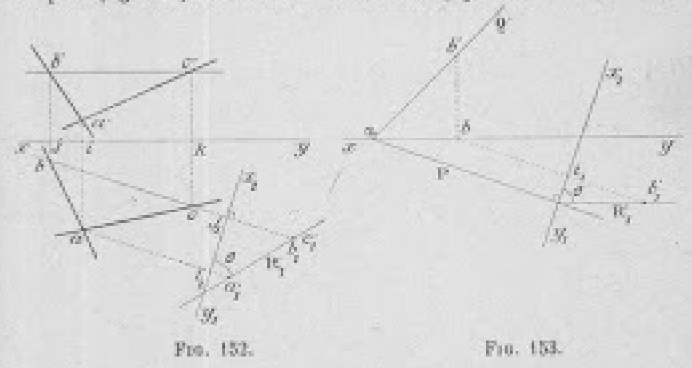


FIG. 152. FIG. 153.

point du plan se projette alors frontalement sur la trace frontale R'_1 (125). On distingue aisément sur chaque épure quels sont les couples de points qui ont servi à déterminer R'_1.

Notons que l'angle de R'_1 avec xy est précisément l'angle θ du plan donné avec le plan horizontal.

2° *Comment sont les traces d'un plan parallèle au 1er ou au 2e bissecteur?*

On peut procéder directement ou par changement de plan.

140. — Rabattement d'un plan vertical sur le plan horizontal de projection.

Soit un plan vertical donné par sa trace horizontale V (fig. 154 et 156) et un point mm' de ce plan.

140 *bis*. — Rabattement d'un plan de bout sur le plan frontal de projection.

Soit un plan de bout donné par sa trace frontale B (fig. 155 et 157) et un point mm' de ce plan.

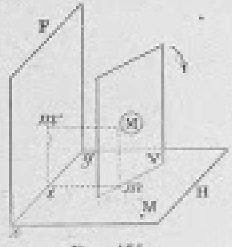


FIG. 154. FIG. 155.

Si on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale jusqu'à l'appliquer sur le plan horizontal de projection H, on dit qu'on l'a **rabattu** sur le plan H.

Si on fait tourner ce plan autour de sa trace frontale jusqu'à l'appliquer sur le plan frontal de projection, on dit qu'on l'a **rabattu** sur le plan F.

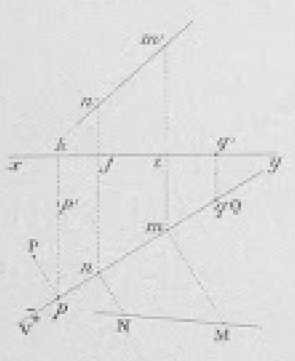




FIG. 156.

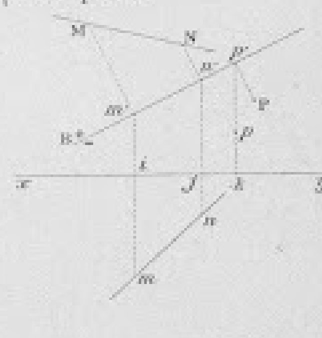


FIG. 157.

Un point mm' de ce plan (𝔐) dans l'espace) vient se placer sur la perpendiculaire en m à la trace V à une distance mM égale à la cote im' du point mm'. Les points à cote positive se placent d'un côté déterminé de la trace V et les points à cote négative de l'autre côté.

Un point mm' de ce plan (𝔐) dans l'espace) vient se placer sur la perpendiculaire en m' à la trace B à une distance m'M égale à l'éloignement im du point mm'. Les points à éloignement positif se placent d'un côté déterminé de la trace B et les points à éloignement négatif de l'autre côté.

Un point gg' de cette trace ne bouge pas pendant le rabattement.

Étant donné un point P du rabattement, on trouve ses projections pp' par l'opération inverse, qui porte le nom de **relèvement**.

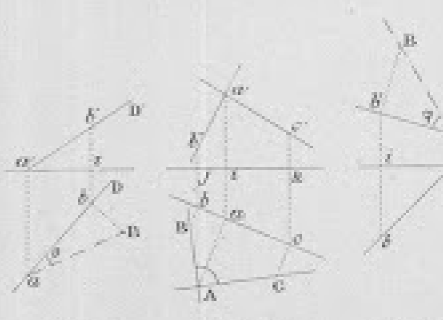
141. — Applications.

I. — *Angle d'une droite* DD′ *avec le plan horizontal de projection.*

Soit aa' la trace horizontale et bb' un point quelconque de cette droite (fig. 158). Rabattons sur le plan horizontal le plan vertical contenant cette droite; aa' ne bouge pas; bb' vient en B. L'angle θ cherché est Bab.

I^bis. — *Angle d'une droite* DD′ *avec le plan frontal de projection.*

Soit aa' la trace frontale et bb' un point quelconque de cette droite (fig. 160). Rabattons sur le plan frontal le plan de bout contenant cette droite; aa' ne bouge pas, bb' vient en B. L'angle φ cherché est B$a'b'$.



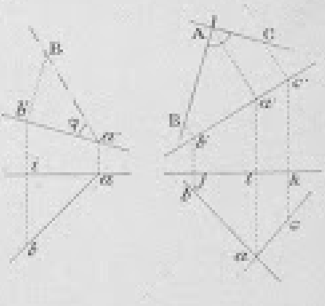


Fig. 158. Fig. 159. Fig. 160. Fig. 161.

II. — *Angle de deux droites dont les projections horizontales sont confondues.*

Elles sont dans un même plan vertical; on le rabat sur le plan horizontal de projection (fig. 159).

IIbis. — *Angle de deux droites dont les projections frontales sont confondues.*

Elles sont dans un même plan de bout; on le rabat sur le plan frontal de projection (fig. 161).

Lignes de pente d'un plan.

142. — On appelle *ligne de pente d'un plan par rapport :*

au plan horizontal toute droite du plan perpendiculaire à ses horizontales.

au plan frontal toute droite du plan perpendiculaire à ses frontales.

143. Conséquence graphique. — Du théorème sur la projection d'un angle droit (GE. 94), on déduit qu'*une ligne de pente par rapport :*

au plan horizontal est, en projection horizontale, perpendiculaire aux horizontales du plan.

Sur l'épure de la figure 162, on a construit une ligne de pente DD′ du plan PαQ′ par rapport au plan H en prenant D perpendiculaire à P et en rappelant.

au plan frontal est, en projection frontale, perpendiculaire aux frontales du plan.

Sur l'épure de la figure 163, on a construit une ligne de pente DD′ du plan bac, $b'a'c'$ par rapport au plan F en construisant d'abord une frontale $bcb'c'$, en prenant D′ perpendiculaire à $b'c'$ et en rappelant.

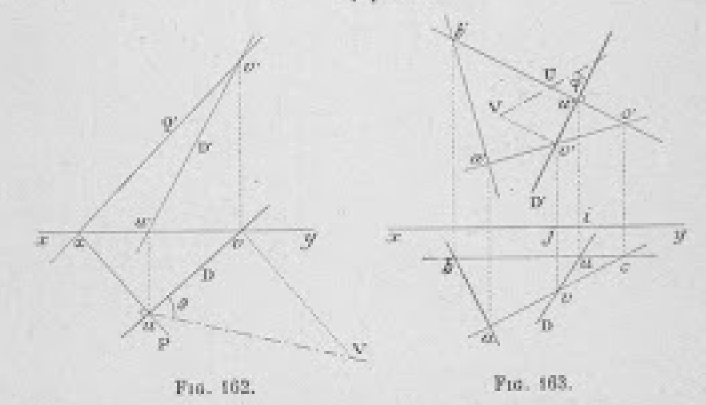


Fig. 162. Fig. 163.

144. — Propriétés géométriques d'une ligne de pente.

1° *L'angle d'un plan avec le plan de base* (H *ou* F) *est égal à l'angle de sa ligne de pente avec le plan de base.*

Sur la figure 162, on a déterminé, par rabattement de plan vertical, l'angle θ du plan PαQ' avec le plan H.

Sur la figure 163, on a déterminé, par rabattement de plan de bout, l'angle φ du plan $bacb'a'c'$ avec le plan F.

2° *Une ligne de pente d'un plan suffit pour définir ce plan.*

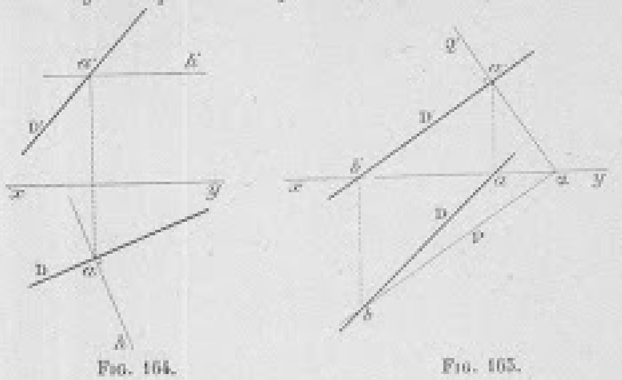


Fig. 164. Fig. 165.

Soit DD' une ligne de pente d'un plan par rapport au plan H (fig. 164) et aa' un point de cette droite; l'horizontale du plan issue de aa' a sa projection horizontale ah perpendiculaire à D et sa projection frontale $a'h'$ parallèle à xy.

Soit DD' une ligne de pente d'un plan par rapport au plan F (fig. 165) aa' sa trace frontale, bb' sa trace horizontale; la trace frontale αQ' du plan est perpendiculaire en a' à D'; sa trace horizontale αP passe par α et b.

145. — Suppression de la ligne de terre.

Considérons un dièdre de projection, $HxyF$, et une figure non solidaire de ce dièdre, le triangle ABC par exemple (fig. 166). Imaginons qu'on déplace le plan H parallèlement à lui-même, par exemple vers le bas et d'une longueur h; la nouvelle projection horizontale est égale à l'ancienne et la projection frontale n'a pas changé. Mais sur l'épure toutes les cotes ayant augmenté de h, la nouvelle projection frontale se déduit de l'ancienne par une translation perpendiculaire à xy d'amplitude h (fig. 167 et 168).

Imaginons, au contraire, qu'on ait déplacé le plan F parallèlement à lui-même. Sur l'épure, la projection horizontale se serait déplacée par une translation perpendiculaire à la ligne de terre tandis que la

projection frontale aurait conservé la même position par rapport à la ligne de terre.

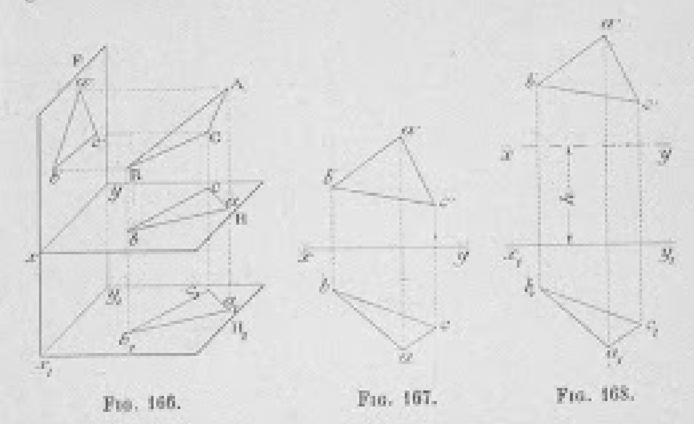


Fig. 166. Fig. 167. Fig. 168.

En résumé, on peut, sur une épure, déplacer les deux projections par des translations perpendiculaires à xy, sans modifier la forme de l'objet représenté.

Imaginons maintenant que, les deux projections restant immobiles

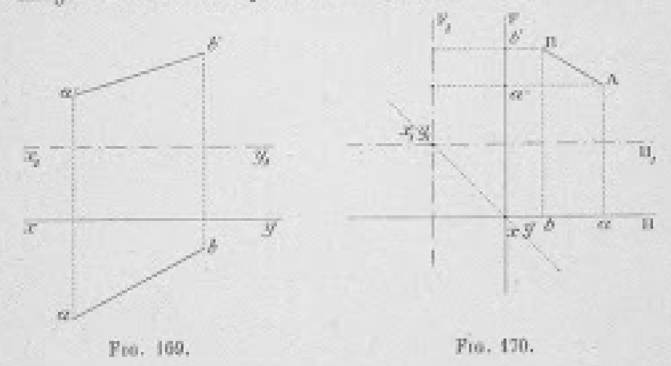


Fig. 169. Fig. 170.

sur une épure, on déplace la ligne de terre parallèlement à elle-même, par exemple vers le haut et d'une longueur l (fig. 169). Toutes les cotes diminuent de l et les éloignements augmentent de l; tout se passe donc comme si on avait déplacé par translation le plan H vers

le haut et le plan F vers l'arrière, d'une longueur l. On voit aisément que le dièdre de projection subit une translation dans laquelle xy se déplace parallèlement à elle-même dans le 2e bissecteur (fig. 170).

Lorsque les plans de projection ne sont pas solidaires de la figure étudiée, la position de la ligne de terre xy est donc arbitraire et nous pourrons ne pas la tracer. Cela équivaut à ne pas fixer l'origine commune des cotes et des éloignements. Lorsque la connaissance de cette origine deviendra nécessaire, on fixera une ligne de terre perpendiculaire aux lignes de rappel.

Notons que cette suppression de la ligne de terre est impossible quand les plans de projection sont rattachés à la figure étudiée et notamment quand on utilise les traces d'une droite ou d'un plan.

On pourra, à titre d'exercice, refaire sans ligne de terre les épures des figures **143**, **145**, **148**, **149**, **164**.

LIVRE II

FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

CHAPITRE I. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES

Le parallélisme de deux droites a déjà été étudié.

§ 1. — PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

146. — Rappelons le théorème suivant :

Pour qu'une droite D *soit parallèle à un plan* P, *il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite du plan* P.

Problèmes. I. — *Reconnaître si une droite donnée est parallèle à un plan donné.*

147. — La réponse est immédiate quand le plan donné est :

vertical (fig. 171); toute droite de ce plan a sa projection sur αP et inversement; donc :

pour qu'une droite DD′ soit parallèle à un plan vertical PαQ′; il faut et il suffit que sa projection horizontale D soit parallèle à la trace horizontale αP.

de bout (fig. 172); toute droite de ce plan a sa projection frontale sur αQ′ et inversement; donc :

pour qu'une droite DD′ soit parallèle à un plan de bout PαQ′, il faut et il suffit que sa projection frontale D′ soit parallèle à la trace frontale αQ′.

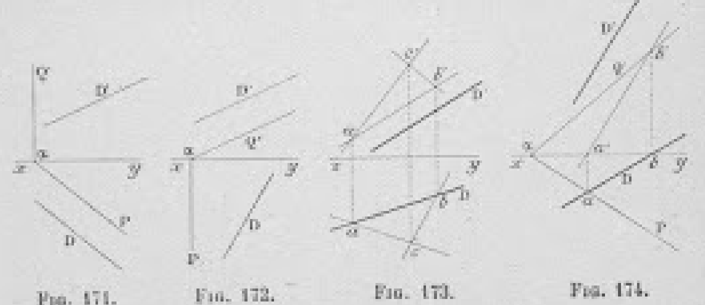


Fig. 171. Fig. 172. Fig. 173. Fig. 174.

148. — Dans le **cas général** où le plan donné est quelconque, on utilise le théorème précédent sous la forme équivalente suivante :

Pour qu'une droite D et un plan P soient parallèles, il faut et il suffit que l'intersection du plan P avec un plan contenant la droite D soit parallèle à cette droite.

On coupe le plan donné par le plan vertical (ou de bout) projetant la droite DD' (fig. 173 et 174); sa trace horizontale est confondue avec D; l'intersection des deux plans est *aba'b'* (133). Il reste à examiner si *a b'* est parallèle à D'. Sur l'épure 173, le plan est donné par deux droites concourantes; sur l'épure 174 il est donné par ses traces P α Q'.

149. II. — *Mener par une droite* DD' *le plan parallèle à une droite* ΔΔ'.

Ce plan est défini par DD' et par la parallèle *aba'b'* à ΔΔ' issue d'un point *aa'* de DD' (faire l'épure).

150. III. — *Mener par un point aa' le plan parallèle à deux droites données* DD', ΔΔ'.

Ce plan est défini par les parallèles *aba'b'* à DD' et *aca'c'* à ΔΔ' (faire l'épure).

Exercice. — Reprendre les deux épures précédentes en supposant la droite ΔΔ' horizontale ou de front, et construire les traces du plan demandé

§ 2. — PLANS PARALLÈLES

151. — Rappelons les deux théorèmes suivants :

I. — *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.*

II. — *Si deux plans sont définis l'un et l'autre par deux droites concourantes parallèles chacune à chacune, les deux plans sont parallèles.*

152. — Conséquence graphique.

Pour que deux plans soient parallèles, il faut et, en général, il suffit que leurs traces de même nom soient parallèles (fig. 175).

Le théorème I montre que la condition est nécessaire et le théorème II montre qu'elle est suffisante, pourvu que les traces de chaque plan soient concourantes.

Il n'y a donc exception que pour les plans parallèles à *xy*. On revient alors au cas général par un changement de plan frontal (plans PQ' et RS', fig. 176); on peut aussi opérer directement en coupant les deux plans par un même plan vertical de trace horizontale V (fig. 177).

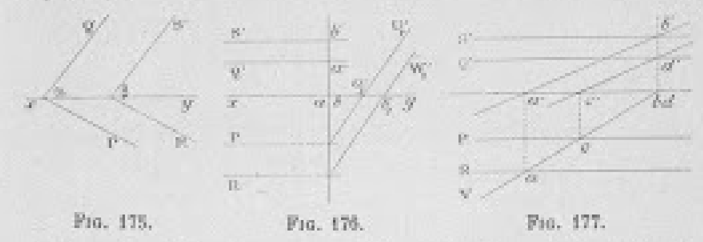


FIG. 175. FIG. 176. FIG. 177.

L'énoncé précédent peut être utilisé sous la forme équivalente suivante :

Pour que deux plans quelconques soient parallèles, il faut et il suffit que leurs horizontales soient parallèles ainsi que leurs frontales.

153. Problème. — *Mener par un point donné aa' le plan parallèle à un plan donné.*

I. — La solution est immédiate quand le plan donné PαQ' est **vertical ou de bout** (fig. 178 et 179).

II. — Si le plan donné est **défini par deux droites concourantes** DD', ΔΔ', le plan cherché est défini par les parallèles *aba'b'*, *aca'c'* à ces droites (faire l'épure).

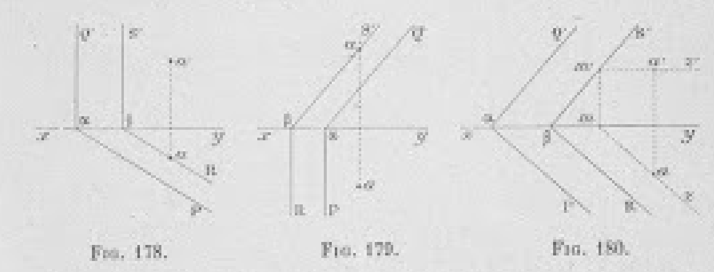


FIG. 178. FIG. 179. FIG. 180.

III. — Si le plan donné est **défini par ses traces** PαQ' (fig. 180), il est commode de diriger la construction de manière à obtenir les traces du plan inconnu : on mène d'abord l'horizontale *az*, *a'z'* parallèle à PP', on marque sa trace frontale *mm'*, on mène par *m'* la parallèle à Q'; c'est la trace frontale S' du plan inconnu; par son point de rencontre β avec *xy*, on mène βR parallèle à P; c'est la trace horizontale cherchée.

IV. — Si le plan donné est **parallèle à xy**, on y prend une droite quelconque $mm'n'$ et on définit le plan cherché au moyen des parallèles à xy et à $mm'n'$ issues de aa' (faire l'épure).

CHAPITRE II. — INTERSECTION DE DROITES ET DE PLANS

§ 1. — INTERSECTION DE DEUX PLANS

154. Cas particulier. — *L'un des plans donnés est perpendiculaire à un plan de projection.*

Ce problème a déjà été traité au n° 133, où on a vu qu'il ne diffère pas de la recherche de la 2e projection d'une droite d'un plan dont on a donné l'une des projections.

155. Cas général. Méthode. — Voir les nos 52 et 53.

Les plans auxiliaires sont le plus souvent verticaux ou de bout, ou, plus particulièrement, de front ou horizontaux.

156. A. — Exemples généraux.

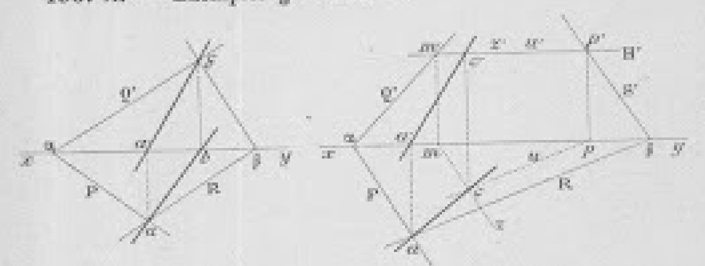


Fig. 181.

Plan auxiliaire.	Intersection avec P α Q'	R β S'	Point obtenu.
H de proj.	αP	βR	aa'
F de proj.	αQ'	βS'	bb'

Fig. 182.

Plan auxiliaire.	Intersection avec P α Q'	R β S'	Point obtenu.
H de proj.	αP	βR	aa'
H'	$m'z'$ mz	$p'u'$ pu	cc'

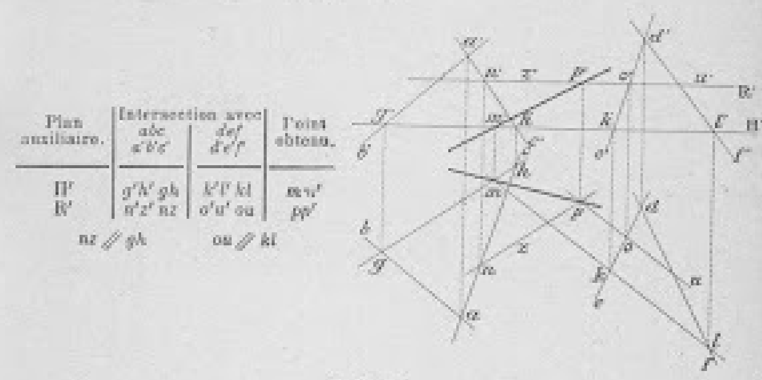
I. — *Intersection de deux plans donnés par leurs traces.*

Les plans auxiliaires les plus commodes sont ici les plans de projection eux-mêmes, en supposant toutefois que les traces de même nom se coupent sur l'épure (fig. 181).

Si aa' est le point commun aux traces horizontales et bb' le point commun aux traces frontales, l'intersection des deux plans est la droite $aba'b'$.

Si les traces frontales, par exemple, se coupent en dehors de l'épure (fig. 182), on coupe les deux plans par un plan auxiliaire horizontal H' (consulter le tableau qui accompagne l'épure). L'intersection des deux plans est $aca'c'$.

II. — *Intersection de deux plans donnés par deux droites concourantes* BAC, EDF (fig. 183).



Plan auxiliaire.	Intersection avec abc a'b'c'	def d'e'f'	Point obtenu.
H'	$g'h'$ gh	$k'l'$ kl	mm'
R'	$n'z'$ nz	$o'u'$ ou	pp'

nz // gh ou // kl

Fig. 183.

Un premier plan auxiliaire horizontal H' donne les droites $ghg'h'$; $klk'l'$; elles se coupent en mm' qui est un premier point de l'intersection.

Un deuxième plan auxiliaire horizontal R' donne les droites $nzn z'$ et $ouo'u'$ respectivement parallèles à $ghg'h'$ et $klk'l'$; elles se coupent en pp' qui est un deuxième point de l'intersection. L'intersection cherchée est la droite $mpm'p'$.

157. B. — Exemples où on a, *a priori*, un renseignement sur l'intersection.

I. — *Intersection de deux plans* P α Q', R α S' *donnés par leurs traces* **et rencontrant** xy **au même point** (fig. 184).

Ce point α appartient à l'intersection; on en obtient un deuxième mm' à l'aide du plan auxiliaire horizontal H' qui coupe les plans donnés suivant les horizontales $aza'z'$ et $bub'u'$. L'intersection cherchée est la droite $\alpha m\ \alpha m'$.

II. — *Intersection de deux plans* parallèles à *xy donnés par leurs traces* PQ′, RS′ (fig. 185).

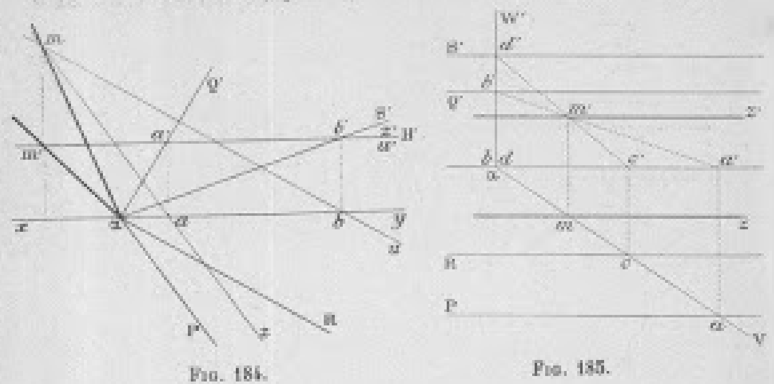


Fig. 184. Fig. 185.

On sait d'avance que l'intersection est parallèle à xy. On en détermine un point mm' au moyen d'un plan auxiliaire vertical VαW′ qui coupe chaque plan suivant les droites $aba'b'$, $cdc'd'$. L'intersection cherchée est la droite $mzm'z'$.

III. — *Intersection de deux plans* PαQ′, RβS′ *dont* **deux traces de même nom** (*les traces horizontales par exemple*) sont parallèles (fig. 186).

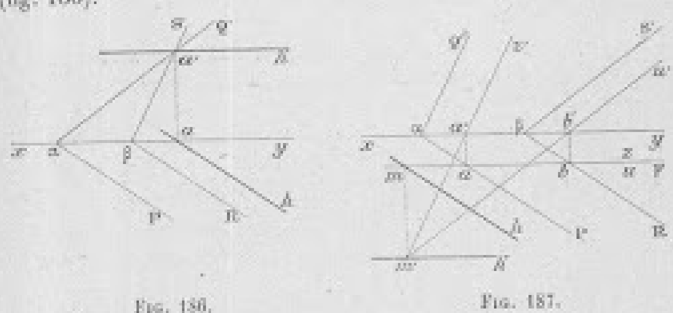


Fig. 186. Fig. 187.

On sait d'avance que l'intersection est parallèle aux traces horizontales PP′, RR′. On en obtient un point aa' à la rencontre des traces frontales Q′ et S′ lorsqu'elles se coupent sur l'épure. L'intersection cherchée est l'horizontale $aha'h'$.

Si les traces frontales se coupent en dehors de l'épure (fig. 187), on utilise un plan auxiliaire de front F pour obtenir un point mm' de l'intersection. Il coupe les deux plans donnés suivant les droites $aza'z'$ et $bub'u'$. L'intersection cherchée est l'horizontale $mhm'h'$.

§ 2. — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

158. Cas particulier. — *Le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection.*

Cherchons par exemple le point mm' d'intersection d'une droite DD′ avec un plan vertical PαQ′ (fig. 188). m, devant se trouver sur αP (125) et sur D, est connu ; on le rappelle en m' sur D′.

Même solution si le plan est de bout (fig. 189).

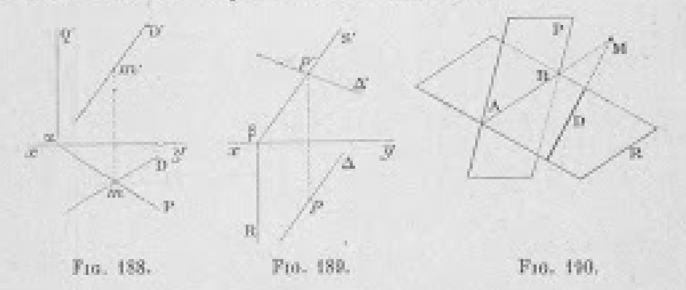


Fig. 188. Fig. 189. Fig. 190.

Remarque. — La trace frontale αQ′ du plan vertical et la trace horizontale βR du plan de bout n'ont pas servi ; il en est souvent ainsi en pratique et on ne doit figurer ces traces qu'au moment d'en avoir besoin.

159. Cas général. — Méthode. Pour chercher l'intersection d'une droite D et du plan quelconque P (fig. 190), on fait passer par D un plan auxiliaire R, on détermine son intersection AB avec le plan P ; la droite AB rencontre D au point cherché M.

En général, le plan auxiliaire sera l'un des deux plans qui projettent la droite.

1re épure. — *Intersection d'une droite* DD′ *avec un plan abc, a′b′c′ défini par deux droites concourantes* (fig. 191).

Le plan vertical D qui projette horizontalement la droite coupe le plan $abca'b'c'$ suivant la droite $efe'f'$; cette droite rencontre la droite DD′ au point cherché mm'.

2ᵉ épure. — *Intersection d'une droite* DD' *avec un plan* PαQ' *donné par ses traces* (fig. 192).

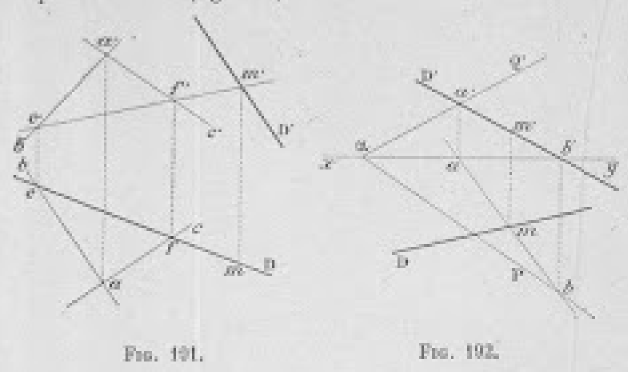


Fig. 191. Fig. 192.

Le plan de bout D' qui projette frontalement la droite coupe le plan PαQ' suivant la droite *aba'b'*; cette droite rencontre la droite DD' au point cherché *mm'*.

Remarque. — Pour obtenir l'intersection de deux plans, on pourra désormais chercher les points où deux droites de l'un rencontrent l'autre.

Applications.

160. I. — Intersection de trois plans P. Q. R.

On cherche la droite D d'intersection de deux de ces plans, P et Q par exemple, puis le point M d'intersection de la droite D avec le 3ᵉ plan R. M est le point commun aux trois plans.

161. II. — Problèmes de constructions de droites.

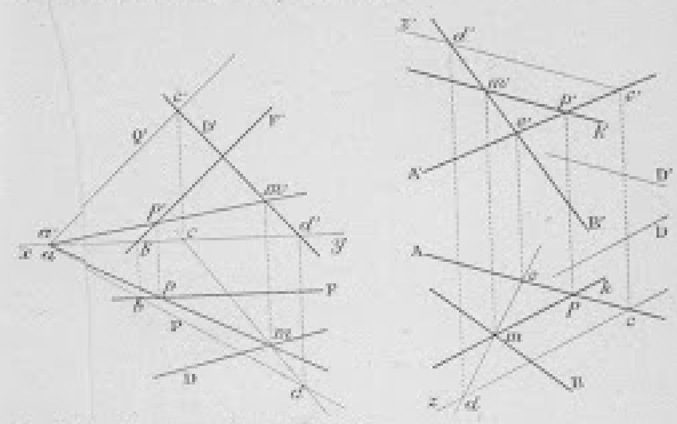
1ʳᵉ épure. — *Construire une droite issue d'un point aa' de xy, s'appuyant sur une frontale* FF' *et sur une droite quelconque* DD' (fig. 193).

On cherche le point *mm'* d'intersection du plan *aa'*FF' avec la droite DD'. La droite cherchée est *ama'm'*. On vérifie qu'elle est concourante avec FF' au point *pp'*.

2ᵉ épure. — *Mener par un point aa' une droite parallèle à un plan* PαQ' *et rencontrant une droite* DD'.

On détermine le plan passant par *aa'* et parallèle au plan PαQ' (par une horizontale et une frontale ou par ses traces). On cherche

le point *mm'* d'intersection de ce plan avec la droite DD'. La droite cherchée est *ama'm'*. — Épure à faire.



P et Q' sont les traces du plan *aa'*FF'.
Fig. 193. Fig. 194.

3ᵉ épure. — *Mener parallèlement à une direction donnée* DD' *une droite s'appuyant sur deux droites données* AA', BB' (fig. 194.)

On mène par l'une des droites, AA' par exemple, le plan AcαA'c'z' parallèle à DD'; on cherche le point *mm'* d'intersection de la droite BB' avec ce plan (plan auxiliaire de bout B'); la parallèle *m'k'mk* menée de ce point à DD' est la droite cherchée. On vérifie qu'elle est concourante avec AA' au point *pp'*.

CHAPITRE III

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

162. — Rappelons les deux énoncés suivants :

Définition. — *On dit qu'une droite est perpendiculaire à un plan quand elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

Théorème. — *Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites concourantes de ce plan* (GE. 47).

Cela posé, considérons un plan $P\alpha Q'$ donné par ses traces supposées concourantes (fig. 195); en d'autres termes, le plan $P\alpha Q'$ n'est pas parallèle à la ligne de terre xy et ne la contient pas. Pour qu'une droite DD′ soit perpendiculaire à ce plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à chacune des traces.

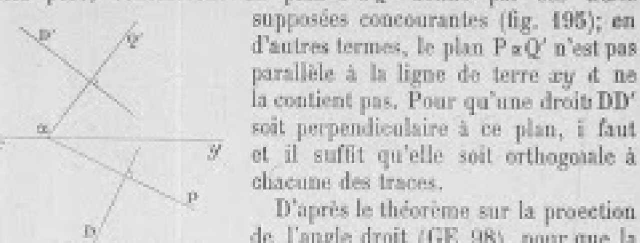


Fig. 195.

D'après le théorème sur la projection de l'angle droit (GE. 98), pour que la droite DD′ soit orthogonale :

à la trace horizontale, il faut et il suffit que ces droites aient leurs projections horizontales D et αP perpendiculaires.

à la trace frontale, il faut et il suffit que ces droites aient leurs projections frontales D′ et $\alpha Q'$ perpendiculaires.

En résumé, on aboutit à l'énoncé suivant :

163. Théorème. — *Pour qu'une droite définie par ses projections soit perpendiculaire à un plan non parallèle à xy défini par ses traces, il faut et il suffit que chaque projection de la droite soit perpendiculaire à la trace de même nom du plan.*

Si les traces du plan ne sont pas construites on peut les remplacer par une horizontale et une frontale de ce plan.

164. Cas d'exception. — *Plan parallèle à xy (ou contenant xy).* Une perpendiculaire à un tel plan est nécessairement de profil; mais les traces du plan étant parallèles, cette condition ne suffit pas. On revient au cas général par un changement de plan frontal rendant le plan donné PQ′ de bout (fig. 196). La droite donnée ab, $a'b'$, qui était de profil sur l'ancienne épure, devient de front sur la nouvelle. Elle est perpendiculaire au plan donné $\beta_1 R'_1$ si $a'_1 b'_1$ est perpendiculaire à $\beta_1 R'_1$.

Fig. 196.

165. 1er Problème. — *Mener par un point aa′ la perpendiculaire à un plan donné; construire son pied ii′* (1).

I. — *Si le plan donné* $P\alpha Q'$ *est défini par ses traces*, le

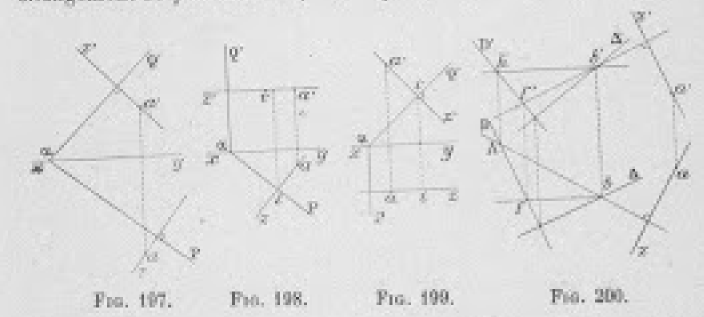
1. En d'autres termes : projeter un point sur un plan.

théorème 163 donne immédiatement les projections az (perpendiculaire à αP) et $a'z'$ (perpendiculaire à $\alpha Q'$) de la perpendiculaire cherchée (fig. 197).

Achever l'épure en construisant le pied ii' (159) et la longueur du segment ai, $a'i'$, distance du point au plan (105 ou 140).

Dans le *cas particulier où le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection* (fig. 198 et 199), la perpendiculaire $aza'z'$ est parallèle à ce plan de projection. On a immédiatement son pied ii' et la longueur du segment $aia'i'$. — Il reste à faire, à titre d'exercice, les épures dans lesquelles le plan donné est de profil, horizontal ou de front.

Si *le plan donné est parallèle à xy*, on le rend de bout par un changement de plan frontal (faire l'épure).


Fig. 197. Fig. 198. Fig. 199. Fig. 200.

II. — *Le plan donné est défini par deux droites concourantes* DD′, ΔΔ′ (fig. 200).

On détermine d'abord une horizontale $bhb'h'$ et une frontale $bfb'f'$ de ce plan; la perpendiculaire cherchée $aza'z'$ est obtenue en menant az perpendiculaire à bh, $a'z'$ perpendiculaire à $b'f'$.

Achever l'épure en construisant le pied ii' (159) et la longueur du segment $aia'i'$, distance du point au plan (105 ou 140).

166. Exercice. — Démontrer que : si un plan a ses traces :
1° symétriques par rapport à xy, il est perpendiculaire au 1er bissecteur.
2° confondues, il est perpendiculaire au 2e bissecteur.
(Mener d'un point de xy la perpendiculaire à ce plan.)

167. 2e Problème. — *Mener par un point aa′ le plan perpendiculaire à une droite donnée; construire son pied ii′* (1).

1. En d'autres termes : projeter un point sur une droite.

Dans le cas général où la droite DD′ est quelconque, donnée par ses projections (fig. 201), on obtient immédiatement, par application du théorème 163, une horizontale *aha′h′* et une frontale *afa′f′* du plan cherché.

Achever l'épure en construisant le pied *ii′*.

En pratique, on peut avoir besoin des traces du plan inconnu, on dirige alors les constructions comme il a été indiqué au n° 153 (III).

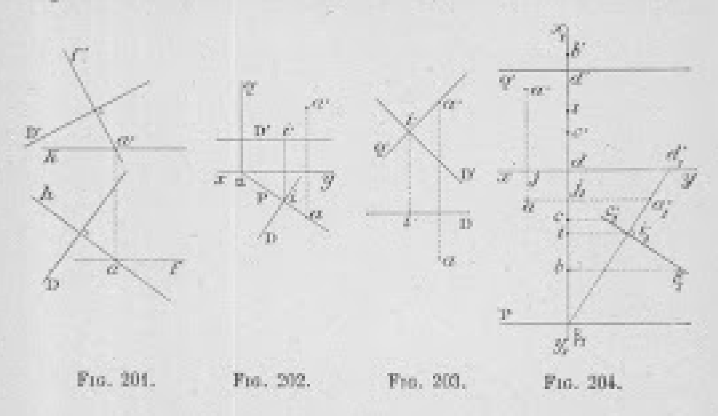


Fig. 201. Fig. 202. Fig. 203. Fig. 204.

Dans le *cas particulier où la droite donnée est parallèle à un plan de projection* (fig. 202 et 203) le plan cherché est perpendiculaire à ce plan de projection. On a immédiatement ses traces (126, 126 bis) et son pied.

Si *la droite donnée est de profil* (fig. 204) et définie par deux points *bb′*, *cc′*, on la rend de front par un changement de plan frontal. Le plan cherché est PQ′ et il a pour pied *ii′*.

168. 3ᵉ Problème. — *Mener par un point aa′ la perpendiculaire à une droite donnée* DD′.

On mène par *aa′* le plan perpendiculaire à la droite et on cherche son pied *ii′*, la perpendiculaire cherchée est *ai*, *a′i′*.

Si la droite est *parallèle à un plan de projection*, on peut raisonner directement en utilisant le théorème sur la projection de l'angle droit (faire les deux épures).

169. 4ᵉ Problème. — *Perpendiculaire commune à deux droites* D, Δ. La méthode à suivre dans le cas général a été indiquée au n° 70.

Nous nous bornerons à faire l'épure dans les deux cas particuliers suivants, où le tracé se simplifie.

1ᵉʳ Cas. — *L'une des droites est perpendiculaire à un plan de projection.*

Supposons par exemple l'une des droites verticale *aba′b′* et l'autre *dd′* quelconque (fig. 205).

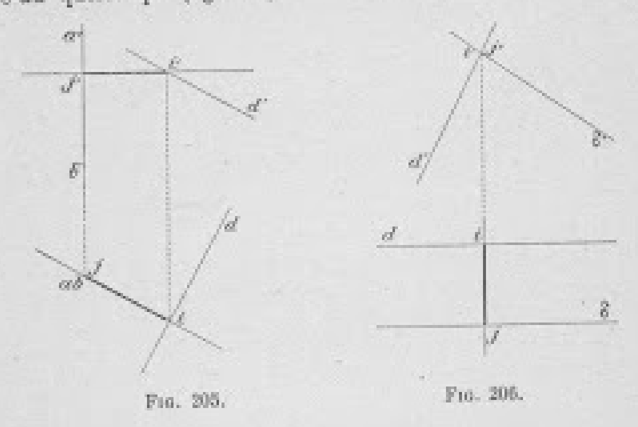


Fig. 205. Fig. 206.

La droite cherchée *iji′j′* est une horizontale; en projection horizontale, elle passe par le point *ab* et est perpendiculaire à *d*; on peut donc tracer *ij*; on achève en rappelant *i* en *i′* et en menant *i′j′* parallèle à *xy*.

La plus courte distance des deux droites est égale au segment *ij*.

2ᵉ Cas. — *Les deux droites sont parallèles à un même plan de projection.*

Supposons-les par exemple toutes deux de front (fig. 206). La perpendiculaire commune est de bout; sa projection frontale est donc réduite à un point *i′j′*, lequel se trouve nécessairement à la rencontre des projections frontales *d′*, *δ′*. On termine en rappelant.

La plus courte distance des deux droites est égale au segment *ij*.

LIVRE III

MÉTHODES ET PROBLÈMES GÉNÉRAUX
(GÉOMÉTRIE COTÉE ET GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE)

CHAPITRE I. — CHANGEMENT DE PLAN

170. — Cette question ressortit uniquement à la méthode des deux projections. Nous avons déjà appris à utiliser le changement de plan frontal pour faire disparaître une particularité incommode ou introduire une particularité commode dans les données d'une épure.

Ainsi, nous avons ramené les droites de profil, les plans parallèles à xy, à une position quelconque, ou bien nous avons rendu une droite quelconque de front ou un plan quelconque de bout.

Une transposition facile permet d'effectuer, le cas échéant, un

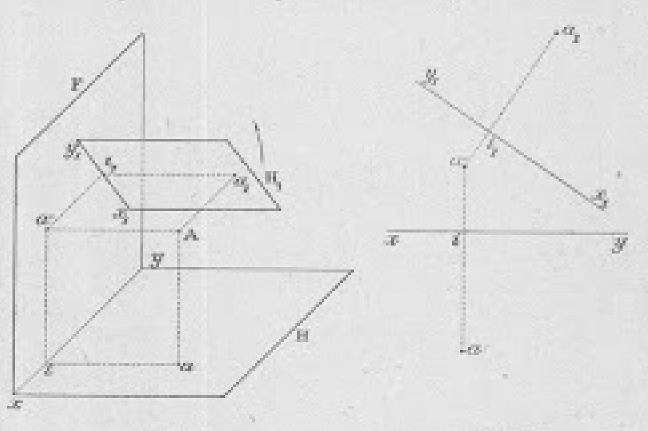


Fig. 207. Fig. 208.

changement de plan horizontal (fig. 207 et 208); il suffit d'appliquer la règle suivante :

171. Règle. — *Dans un changement de plan horizontal :*

1° *la projection frontale ne change pas;*

2° *les éloignements ne changent pas.*

Cette transformation permet de rendre :

horizontale une droite quelconque

vertical un plan quelconque (faire les épures).

Remarque. — On peut également, par un changement de plan

frontal, rendre :	horizontal, rendre :
de bout une droite horizontale,	verticale une droite frontale,
de front un plan vertical.	de front un plan de bout.

Faire les épures.

Montrer comment on peut, par deux changements de plans successifs, rendre :

une droite quelconque perpendiculaire à un plan de projection;

un plan — parallèle — —

172. Exercice. — *Perpendiculaire commune à deux droites* DD', ΔΔ' *dont l'une est de front* (fig. 209).

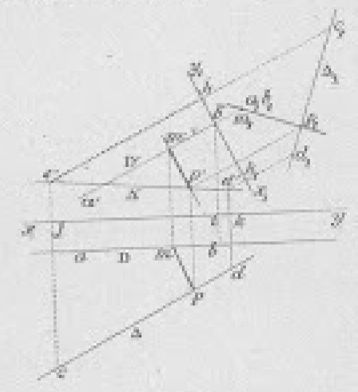


Fig. 209.

On ramène cette épure à celle du n° 169-1° par un changement de plan horizontal rendant verticale la frontale donnée DD'.

CHAPITRE II. — ROTATIONS

De même qu'un changement de plan, une rotation peut être utilisée :

1° pour faire disparaître des particularités incommodes;

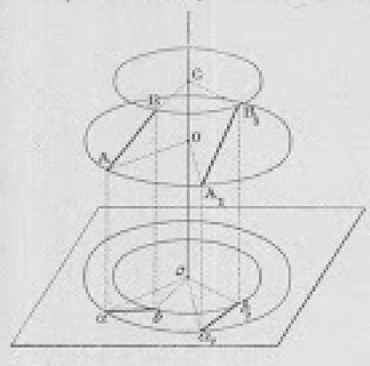


Fig. 210.

2° pour en introduire de commodes;

3° pour obtenir une vue différente de l'objet représenté.

Rappelons l'énoncé suivant (fig. 210).

173. — *Si une figure se déplace par rotation, tous ses points se déplacent sur des cercles ayant pour axe l'axe de rotation et décrivent des arcs de même mesure et de même sens.*

Il est commode de le mettre sous la forme équivalente suivante :

Si une figure se déplace par rotation :

1° sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe subit une rotation du même angle et de même sens autour du pied de l'axe;

2° les distances de ses points à ce plan ne varient pas.

§ 1. — ROTATION EN GÉOMÉTRIE COTÉE

174. — La rotation est rarement employée en Géométrie cotée. Si l'axe est vertical, c'est une rotation pure et simple de l'épure autour du pied de cet axe, chaque point conservant sa cote. Si l'axe est horizontal, on utilise une projection auxiliaire sur un plan vertical perpendiculaire à l'axe, procédé qui sera étudié au paragraphe suivant.

§ 2. — ROTATION EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Nous nous bornerons aux cas où l'axe est perpendiculaire à un plan de projection.

175. Rotation d'un point. — L'énoncé n° 173 peut être mis sous la forme :

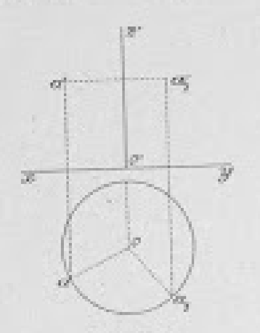


Fig. 211.

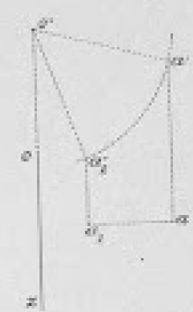


Fig. 212.

Si un point aa' tourne autour d'un axe vertical $ozo'z'$ (fig. 211)

1° sa projection horizontale a décrit un arc de cercle de centre o, dont la mesure et le sens sont donnés;

2° sa projection frontale a' se déplace sur une parallèle à xy.

Si un point aa' tourne autour d'un axe de bout $ozo'z'$ (fig. 212)

1° sa projection frontale a' décrit un arc de cercle de centre o', dont la mesure et le sens sont donnés;

2° sa projection horizontale a se déplace sur une parallèle à xy.

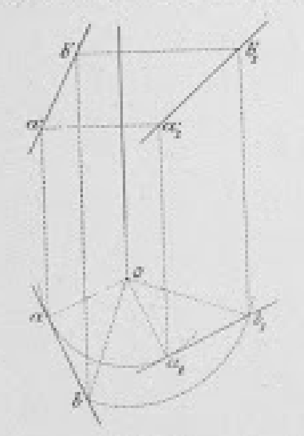


Fig. 213.

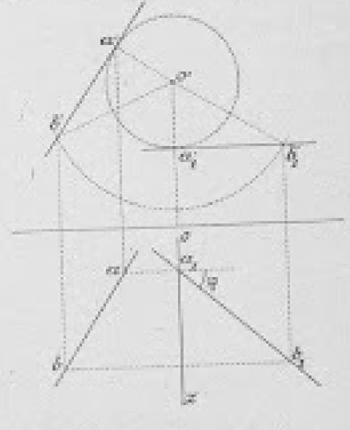


Fig. 214.

176. Rotation d'une droite. — On en fait tourner deux points. Il est commode de prendre pour l'un de ces points le pied aa' de la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite (fig. 213). Pour avoir la nouvelle projection horizontale d'un point bb', on peut, ou utiliser le cercle de centre o passant par b, ou porter $a_1b_1 = ab$.

Le tracé se simplifie quand la droite rencontre l'axe, car le point commun reste immobile pendant la rotation (faire l'épure).

177. Exercice. — *Rendre une droite parallèle à un plan de projection.*

On peut rendre une droite :
de front par une rotation autour d'un axe vertical;
horizontale — — de bout.

Cette dernière épure a été exécutée sur la figure 214. On a fait tourner la droite jusqu'à ce que sa projection frontale soit parallèle à xy.

Dans la nouvelle position, on obtient :
1° la longueur a_1b_1 du segment AB de l'espace;
2° l'angle φ de la droite avec le plan frontal de projection.

178. Remarque. — On peut également rendre :
1° de bout une horizontale (rotation d'axe vertical)
2° verticale une frontale (rotation d'axe de bout).
Faire les épures.

Montrer comment on peut, au moyen de deux rotations successives, rendre une droite quelconque perpendiculaire à l'un des plans de projection.

179. Rotation d'un plan. — On en fait tourner trois points ou un point et une droite.

Il est commode d'utiliser le point aa' où l'axe perce le plan, car ce point reste fixe, et de faire tourner une horizontale si l'axe est vertical, une frontale si l'axe est de bout. Sur la figure 215, l'axe est de bout et on a fait tourner la trace frontale du plan.

Si le point bb' est en dehors de l'épure, on peut faire tourner deux horizontales ou deux frontales du plan.

Remarquons que tous ces procédés équivalent à faire tourner la ligne de pente qui rencontre l'axe et qui, comme nous l'avons vu, suffit pour définir le plan.

180. Exercice. — *Rendre un plan perpendiculaire à un plan de projection.*

On peut rendre un plan :
de bout par une rotation autour d'un axe vertical,
vertical — — de bout.

La 1re épure a été exécutée sur la figure 216. On a fait tourner le plan jusqu'à ce que sa trace horizontale soit perpendiculaire à xy.

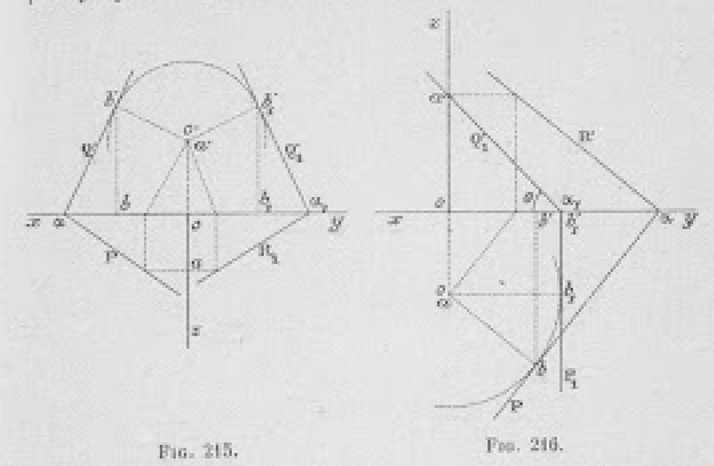


Fig. 215. Fig. 216.

La nouvelle position nous donne l'angle θ du plan avec le plan horizontal.

181. Remarque I. — On peut rendre également :
de front un plan vertical (rotation d'axe vertical),
horizontal un plan de bout (rotation d'axe de bout).
Faire les épures.

Montrer comment on peut, au moyen de deux rotations successives, rendre un plan quelconque parallèle à l'un des plans de projection.

182. Remarque II. — On constate que les changements de plan et les rotations résolvent les mêmes problèmes; cela s'explique aisément : pour amener une droite à être de front, il est clair qu'on peut déplacer soit le plan frontal de projection, soit la droite donnée. Le résultat obtenu est le même, mais les tracés sont différents.

Quand deux transformations sont nécessaires, on peut même utiliser successivement les deux méthodes précédentes.

Fig. 217.

Ainsi, pour rendre une droite quelconque verticale, on peut :

1° la rendre de front par un changement de plan frontal;
2° la rendre verticale par une rotation autour d'un axe de bout.

183. Remarque III. — Nous avons considéré uniquement les rotations dont l'axe est perpendiculaire à un plan de projection. Si l'axe est parallèle à un plan de projection (horizontal ou de front) on rendra cet axe perpendiculaire à l'autre plan de projection par un changement de plan approprié (fig. 217). Le point aa' devient, sur la nouvelle épure, $\alpha\alpha'$; il tourne jusqu'en $\alpha_1\alpha'_1$ ou, sur l'épure primitive, $a_1a'_1$.

CHAPITRE III. — RABATTEMENTS

§ 1. — MÉTHODES ET TRACÉS GÉNÉRAUX

(G. cotée et G. descriptive)

184. Définition. — Rabattre un plan P sur un plan horizontal quelconque H_r (fig. 218) c'est faire tourner le plan P autour de son intersection AB avec le plan H_r jusqu'à ce qu'il coïncide avec ce plan.

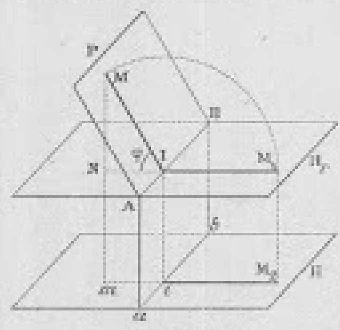


Fig. 218.

Dans cette nouvelle position une figure du plan P (triangle, cercle, etc.) se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal. On peut donc effectuer sur la projection des constructions ou des mesures. Ces constructions effectuées, on ramène par la rotation inverse le plan dans sa position initiale. C'est le **relèvement**.

L'horizontale AB s'appelle **charnière** du mouvement.

185. Méthode. — Soit MI la perpendiculaire à la charnière AB; c'est une ligne de pente; sa projection im est donc perpendiculaire à la projection ab de la charnière. Soit IM_1 le rabattement du segment IM; il est resté perpendiculaire à AB pendant le mouvement et sa projection iM_1 est perpendiculaire à ab; M_1 se trouve donc sur la perpendiculaire mi menée de m à la projection ab de la charnière.

D'autre part, la distance iM_1 ou IM_1, ou IM est l'hypoténuse du triangle rectangle IMN dont nous connaissons les deux côtés de l'angle droit : NI est égal à la distance mi des projections du point et de la charnière; NM est égal à la différence des cotes du point et de la charnière.

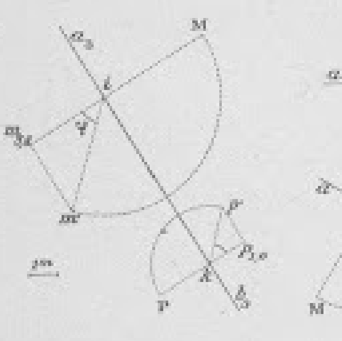
En résumé, nous aboutissons à l'énoncé suivant :

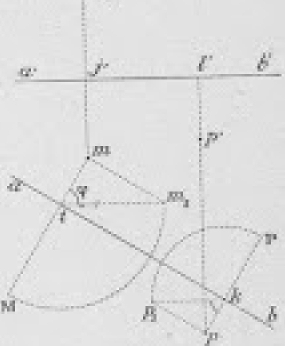
186. Règle du triangle rectangle. — *Le rabattement d'un point autour d'une horizontale se projette horizontalement :*

1° sur la perpendiculaire menée de la projection du point à la projection de la charnière;

2° à une distance de la charnière égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance des projections horizontales du point et de la charnière et la différence des cotes du point et de la charnière.

187. Épures. — Cette règle s'applique en géométrie cotée aussi bien qu'en géométrie descriptive (fig. 219 et 220). Nous avons désigné dans les deux cas la projection du rabattement par M. Il est commode de construire le triangle rectangle sur im comme côté, le sommet de l'angle droit étant en m (imm' en cotée, imm_1 en descriptive).





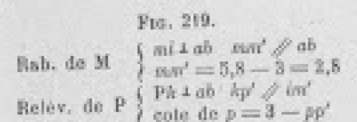


Fig. 219.

Rab. de M { $mi \perp ab$ $mm' \parallel ab$; $mm' = 5{,}8 - 3 = 2{,}8$ }

Relèv. de P { $Pk \perp ab$ $kp' \parallel im'$; cote de $p = 3 - pp'$ }

Fig. 220.

Rab. de M { $mi \perp ab$ $mm_1 \parallel ab$; $mm_1 = j'a'$ }

Relèv. de P { $Pk \perp ab$ $kp_1 \parallel im_1$; $kp_1 = kP$ $l'p' = pp_1$ }

Le sens dans lequel se porte l'hypoténuse de ce triangle à partir de i sur la perpendiculaire à ab dépend du sens choisi pour le rabattement.

188. Remarque. — L'angle aigu en i du triangle rectangle est égal à l'angle φ du plan rabattu P avec le plan horizontal. Par suite, si on rabat plusieurs points du plan P tous les triangles rectangles correspondants sont semblables entre eux.

189. Relèvement. — Pour relever un point ayant pour rabattement P, on lui applique la construction inverse (notice sous chaque épure) en ayant soin de remarquer que si les deux rabattements M et P sont, par exemple, de part et d'autre de la charnière ab, il en est de même pour les projections m, p de leurs relèvements.

190. Rabattement et relèvement d'une figure. — Pour rabattre ou relever plusieurs points d'une figure plane, on n'applique pas chaque fois la règle du triangle rectangle : ce procédé serait trop long et aurait en outre le grave inconvénient de disloquer la figure, en ce sens que trois points en ligne droite dans l'espace ne le seraient plus sur le rabattement à cause des erreurs graphiques.

On procède de proche en proche, par recoupements au moyen de droites rencontrant la charnière; les points de rencontre restent immobiles pendant le rabattement ou le relèvement.

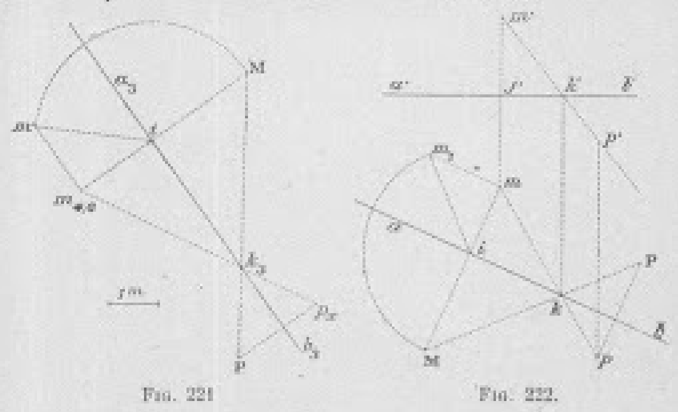


Fig. 221 Fig. 222.

Relevons par exemple le point rabattu en P (fig. 221 et 222); joignons P à un point rabattu M de manière que MP rencontre la charnière ab au point k situé dans les limites de l'épure.

Le relèvement de la droite Mk est mk_1; la projection p du relèvement de P se trouve sur mk et sur la perpendiculaire menée de P à ab; on détermine ensuite la cote x du point de la droite mk_1 projeté en p (11).

Le relèvement de la droite Mk a pour projection horizontale mk; la projection horizontale p du relèvement de P se trouve sur mk et sur la perpendiculaire menée de P à ab; on rappelle ensuite k en k' sur $a'b'$ et p en p' sur $m'k'$.

191. Cas particulier. — *Rabattement d'un plan vertical sur un plan horizontal.* — Cette opération a déjà été utilisée en géométrie cotée. En géométrie descriptive, nous avons eu l'occasion de rabattre un plan vertical sur le plan horizontal de projection (140).

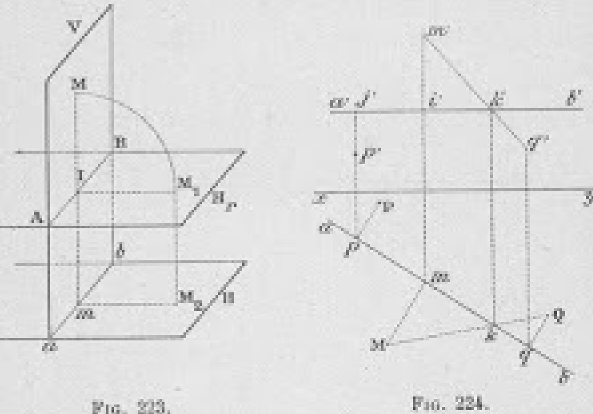


Fig. 223. Fig. 224.

Lorsque ce rabattement a lieu sur un plan horizontal quelconque (fig. 223 et 224) le rabattement M de mm' se trouve encore sur la perpendiculaire en m à ab mais la distance mM (sur l'épure) est égale à la différence des cotes $i'm'$ du point et de la charnière.

Pour relever un point, P par exemple, on applique la construction inverse.

Pour rabattre ou relever d'autres points, on opère encore par recoupement; sur la figure 224, on a relevé Q en qq' au moyen de la droite QM, rencontrant la charnière en kk'.

§ 2. — OPÉRATIONS PROPRES A LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

192. Rabattement par la frontale. — Soit un point mm' que l'on veut rabattre autour de la charnière $aba'b'$ (fig. 225). Traçons sa frontale $mfm'f'$. Supposons le problème résolu et soit M le rabattement de mm' ; le segment MF de l'espace est égal d'une part à sa projection frontale $m'f'$, d'autre part à son rabattement Mf, d'où la solution : *le rabattement du point mm' se fait sur la perpendiculaire menée de m à ab, à une distance de f égale à la vraie grandeur $m'f'$ de la frontale.*

Cette construction aboutit à l'intersection d'une droite et d'un cercle et donne deux points : le sens dans lequel on effectue le rabattement permet de préciser lequel des deux est le point M.

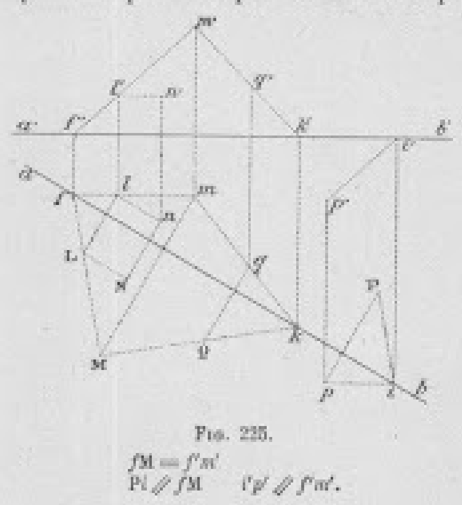


FIG. 225.

$fM = f'm'$
$Pl \parallel fM \qquad l'p' \parallel f'm'$.

Pour relever un point du plan ABM rabattu en P, on remarque que toutes les frontales d'un plan sont parallèles dans l'espace, en projection et en rabattement ; on peut alors effectuer la construction inverse (voir les indications qui accompagnent l'épure). Remarquons que cette construction inverse est un recoupement par frontale et ligne de pente.

D'autres recoupements peuvent également être employés, utilisant les horizontales (N) ou des droites rencontrant la charnière (Q).

193. Rabattement d'un plan de bout sur un plan horizontal. — Soit un plan de bout défini par sa trace frontale Q' (fig. 226). Pour rabattre un point mm' de ce plan autour de la charnière $aba'b'$ (droite de bout), le procédé le plus simple est l'emploi de la frontale $mfm'f'$.



FIG. 226.

Comme on pouvait le prévoir, ce tracé ne diffère pas de celui qui correspond à une rotation d'axe $aba'b'$.

On peut remarquer aussi que la frontale est en même temps ligne de pente ; le triangle rectangle de la règle est tout construit en $m'i'f'$.

194. Opérations corrélatives. — La transposition d'opérations et de langage que nous avons maintes fois employée permettra d'effectuer les opérations suivantes :

Rabattement d'un plan quelconque sur un plan de front

1° par la ligne de pente ; énoncer la règle du triangle rectangle et faire l'épure.

2° par l'horizontale. Faire l'épure.

Rabattement d'un plan de bout sur un plan de front (faire l'épure).
— — vertical — (—).

Cette dernière opération ne diffère pas d'une rotation d'axe vertical.



FIG. 227.

195. REMARQUE. — Le rabattement vient d'être étudié directement en tant qu'opération simple, mais il peut être rattaché aux changements de plan et rotations en l'envisageant sous la forme suivante : *rendre un plan quelconque horizontal en le faisant tourner autour d'une de ses horizontales* $ab, a'b'$. Nous avons vu que ce problème exige deux opérations successives, par exemple d'abord un changement de plan frontal rendant de bout l'horizontale $aba'b'$, puis une rotation autour de cette droite. Sur la fig. 227, la ligne de terre initiale xy, non fixée primitivement, a été prise sur $a'b'$; la nouvelle ligne de terre x_1y_1 est perpendiculaire à ab. Le tracé ainsi obtenu ne diffère pas sensiblement de celui qui a été réalisé directement. Le triangle rectangle $m'_1i_1a'_1$ n'est autre que celui de la règle, mais placé ailleurs.

§ 3. — ÉTUDE DE LA PROJECTION D'UN CERCLE

(G. cotée et G. descriptive)

On sait que la projection orthogonale d'un cercle est une ellipse.

196. Problème. — *Un cercle est donné par son plan, son centre et son rayon; construire :*

1° *les axes de la projection;*

2° *un point quelconque et sa tangente.*

197. I. — Épure de géométrie cotée. — Soit le cercle de centre O_3, de rayon $1^m,8$ contenu dans le plan d'échelle de pente P (fig. 228).

Le **grand axe** de l'ellipse projection est la projection du diamètre horizontal du cercle; on obtient les sommets a, b du grand axe en prenant sur l'horizontale du point O $oa = ob = 1,8$ (rayon).

Le **petit axe** de l'ellipse est la projection du diamètre de plus grande pente du cercle; celui-ci se rabat sur le plan horizontal de cote 3 suivant le diamètre CD perpendiculaire à ab. Pour relever C, nous avons construit en ghg' l'angle φ du plan P avec le plan horizontal; nous avons mené le rayon oc' parallèle à hg'; la perpendiculaire $c'c$ à oC achève le triangle rectangle de relèvement et donne c. On prend enfin $od = oc$.

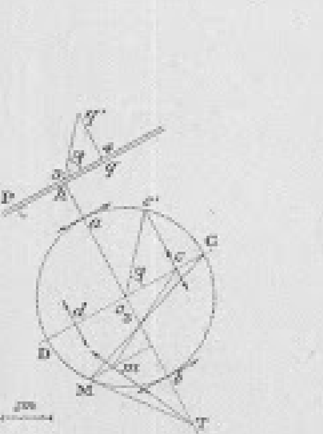


Fig. 228.

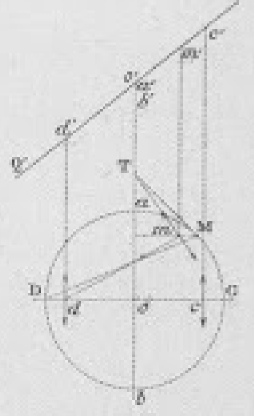


Fig. 229.

Pour obtenir un **point quelconque et sa tangente**, nous avons relevé un point quelconque M du cercle rabattu au moyen de la droite MG; la tangente MT au cercle se relève en m T, tangente à l'ellipse.

198. II. — Épure de géométrie descriptive. Le plan du cercle est de bout. Soit

le cercle de centre oo', de rayon r, contenu dans le plan de bout Q' (fig. 229).

Le grand axe de l'ellipse projection du cercle est porté par l'horizontale du point oo' (laquelle est de bout); on obtient les sommets a, b du grand axe en prenant $oa = ob = r$.

Le petit axe est porté par le diamètre perpendiculaire à $aba'b'$; on obtient les projections frontales c', d' des sommets du petit axe en prenant sur Q' $oc' = od' = r$; on rappelle c', d' sur la perpendiculaire en o à ab.

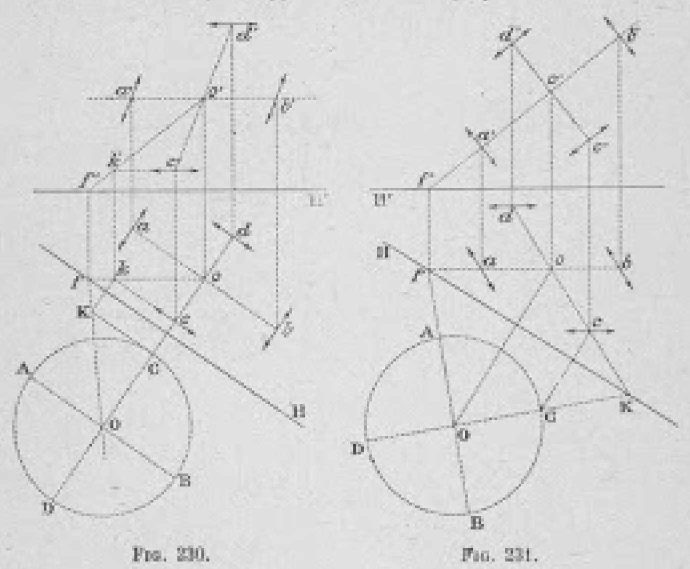


Fig. 230. Fig. 231.

On construit un point quelconque m de l'ellipse et la tangente mT comme dans l'épure précédente.

199. III. — Épure de géométrie descriptive. Le plan du cercle est quelconque. Soit le cercle de centre oo', de rayon r, dont le plan est défini par le point oo' et l'horizontale HH' (fig. 230, 231 et 232). Construisons d'abord le rabattement du cercle autour de l'horizontale HH' au moyen du rabattement O de oo', obtenu par la frontale $ofo'f'$.

1° *Axes en projection horizontale* (fig. 230). Le grand axe est porté par la parallèle à l'horizontale HH'; on l'obtient en portant $oa = ob = r$. Le petit axe $cdc'd'$ est le relèvement du diamètre CD perpendiculaire à ab (on a relevé C en c au moyen de l'horizontale rabattue CK, relevée en ck $c'k'$.

Remarquons qu'en projection frontale, les tangentes en c', d' sont parallèles à $a'b'$ et les tangentes en a', b' sont parallèles à $c'd'$.

cc' et dd' sont les points le plus haut et le plus bas du cercle donné.

2° *Axes en projection frontale* (fig. 231). Le grand axe est porté par la

frontale $o'f'of$; on l'obtient en portant $o'a' = o'b' = r$. Le petit axe est le relèvement du diamètre CD perpendiculaire au diamètre AB, rabattement du diamètre de front. On a utilisé le point de rencontre K de CD avec la charnière.

Remarquons qu'en projection horizontale, les tangentes en a et b sont parallèles à cd et les tangentes en c et d sont parallèles à ab.

cc' et dd' sont les points le plus en avant et le plus en arrière du cercle

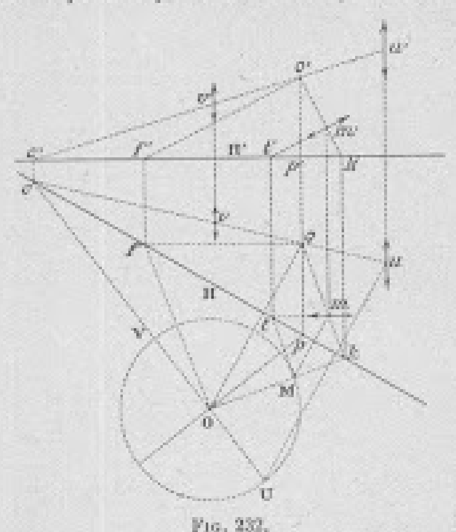


Fig. 232.

3° *Point quelconque et sa tangente* (fig. 232). Le point M du cercle rabattu a été relevé en mm' au moyen de la droite OMK. La tangente Mt a été relevée en $mtm't'$.

Cette construction permet de déterminer les points de la projection où la tangente passe par un point donné ou est parallèle à une droite donnée du plan $\alpha\alpha'$HH'. Cherchons par exemple les points où la tangente est de profil; une droite de profil du plan est $opo'p'$, rabattue en Op; le diamètre UV perpendiculaire à Op est relevé en $uvu'v'$ au moyen de son point de rencontre cc' avec la charnière; uu' et vv' sont les points le plus à droite et le plus à gauche du cercle donné.

CHAPITRE IV. — **DISTANCES ET ANGLES**

§ 1. — DISTANCES

200. — Distance de deux points.

I. — Géométrie cotée. — Voir le n° 13-II (calcul ou rabattement).

II. — Géométrie descriptive. — Voir le n° 105 (changement de plan frontal).

On peut aussi construire la vraie grandeur du segment $aba'b'$ (fig. 233) en rabattant le plan vertical ab autour de l'horizontale du point aa'. Notons qu'on obtient en même temps l'angle θ du segment $aba'b'$ avec le plan horizontal.

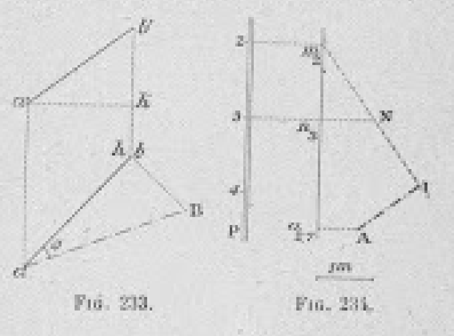


Fig. 233. Fig. 234.

201. Distance d'un point à un plan. — Nous avons déjà expliqué (n° 67 en géométrie cotée, 165 en géométrie descriptive) comment on construit la perpendiculaire à un plan issue d'un point A et le pied I de cette perpendiculaire; on cherche ensuite la vraie grandeur de ce segment AI comme on vient de l'indiquer.

Si on désire spécialement la distance du point au plan, on peut utiliser les tracés suivants, qui sont plus rapides.

I. — Géométrie cotée. — Soit un plan d'échelle de pente P et un point $a_{2,7}$ (fig. 234); figurons le plan vertical V passant par ce point et perpendiculaire aux horizontales du plan P; on sait (GE, n° **84**) que la perpendiculaire cherchée se trouve dans le plan V et est perpendiculaire à l'intersection m_2n_3 des plans V et P. Rabattons le plan V sur le plan horizontal de cote 2. La distance cherchée est la perpendiculaire AI au rabattement mN de l'intersection des plans V et P.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on relève le pied I.

II. — Géométrie descriptive. — Soit le plan PαQ' et le point aa'

(fig. 235). Faisons un changement de plan frontal rendant le plan $P\alpha Q'$ de bout. Le segment $a'_1i'_1$, perpendiculaire à la nouvelle trace frontale R_1, est la distance cherchée.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on revient à l'ancienne épure pour le point ii'_1.

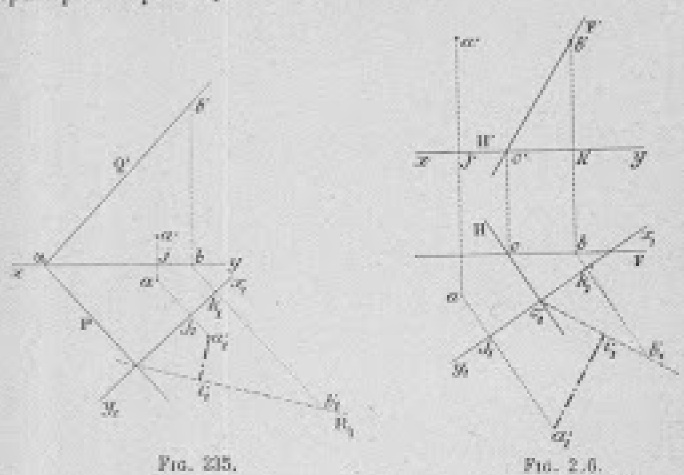


Fig. 235. Fig. 236.

VARIANTE. — Le plan est donné par une horizontale HH' et une frontale FF' et il n'y a pas de ligne de terre (fig. 236). On prend l'ancienne ligne de terre sur H' et la nouvelle perpendiculaire à H.

202. — Distance d'un point à une droite.

C'est une construction et une mesure à effectuer dans un plan; on va donc rabattre le plan défini par la droite et le point autour d'une horizontale.

I. Géométrie cotée. — Soit la droite D et le point $a_{3,7}$ (fig. 237); la charnière est $a_{3,7}m_{3,7}$; les points a et m ne bougent pas pendant le rabattement; rabattons un point quelconque b_2 de la droite (règle du triangle rectangle); la distance aI de a au rabattement mB de la droite est la distance cherchée.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on relève le pied I.

Faire les épures des cas particuliers suivants : la droite donnée est horizontale ou verticale.

II. Géométrie descriptive. — Soit la droite DD' et le point aa' (fig. 238); la charnière est l'horizontale $a'h'ah$; les points aa' et hh' ne bougent pas pendant le rabattement; rabattons un point quelconque bb' de la droite (règle du triangle rectangle); la distance aI de a au rabattement hB de la droite est la distance cherchée.

Si on veut la perpendiculaire elle-même, on relève le pied I.

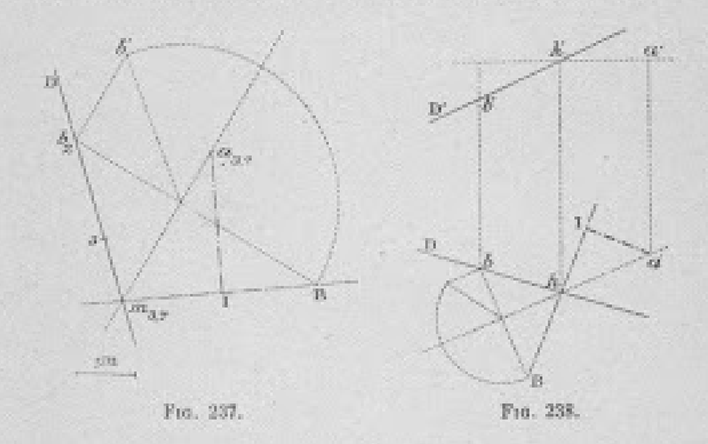


Fig. 237. Fig. 238.

Si la droite donnée est de profil et définie par deux points mm', pp' (faire l'épure) on prend pour charnière l'horizontale du point mm' par exemple, définie par son point d'appui hh' sur la droite $apa'p'$.

§ 2. — ANGLES

203. — Angle de deux droites.

Nous supposons que les deux droites dont on veut l'angle ont été rendues concourantes. La méthode consiste à rabattre le plan de ces deux droites autour d'une horizontale.

I. Géométrie cotée. (fig. 239). — Soit les deux droites $a_{3,4}b_2$ et $a_{3,4}c_4$. La charnière est b_2c_2; les points b_2c_2 ne bougent pas pendant le rabattement; $a_{3,4}$ est rabattu en A par la règle du triangle rectangle; l'angle cherché est bAc.

Si on veut la bissectrice de cet angle, on la trace sur le rabattement en Az et on la relève.

Signalons que :
si l'une des droites est horizontale, elle est charnière;
si l'une des droites est verticale ou si elles ont leurs projections confondues (26), on a à effectuer un rabattement de plan vertical.

Faire ces épures.

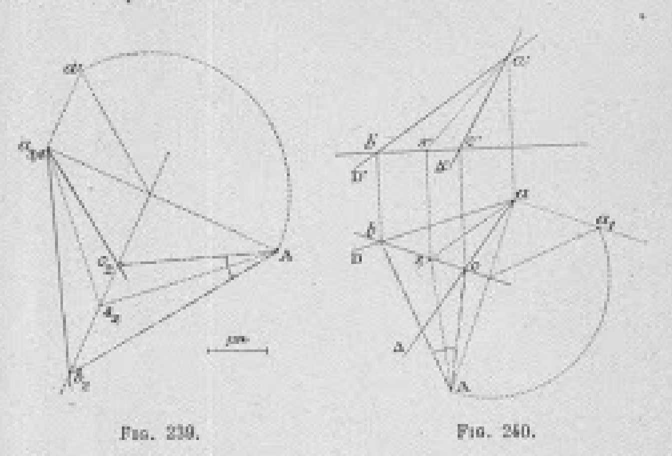


Fig. 239. Fig. 240.

C'est ainsi qu'on procède, en particulier, pour avoir l'angle d'une droite avec le plan horizontal (13).

II. Géométrie descriptive. — Sur la fig. 240, les deux droites s'appellent DD′ et ΔΔ′; leur point commun est aa' et la charnière $bcb'c'$; les points bb' et cc' ne bougent pas pendant le rabattement; aa' est rabattu en A par la règle du triangle rectangle; l'angle cherché est bAc.

Si on veut la bissectrice de cet angle, on la trace sur le rabattement en As et on la relève.

Signalons que :
si l'une des droites est horizontale, elle est charnière;
si l'une des droites est frontale, on rabat sur son plan de front en la prenant pour charnière;
si les deux droites sont dans un même plan vertical ou de bout (projections correspondantes confondues), on rend leur plan parallèle à un plan de projection par un changement de plan, une rotation ou un rabattement (Faire les épures).

204. — Angle d'une droite et d'un plan.

On appelle angle d'une droite D et d'un plan P (fig. 241) l'angle aigu φ que fait cette droite avec sa projection sur le plan.

Dans le **cas particulier** où le plan P est un plan de projection, on

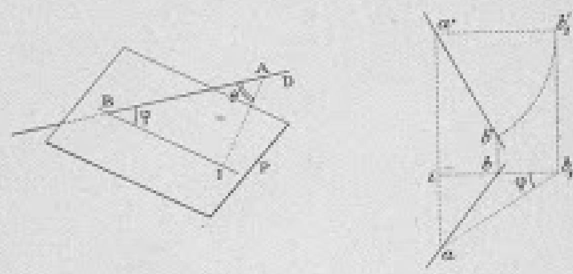


Fig. 241. Fig. 242.

utilise directement cette définition pour déterminer l'angle φ; en géométrie cotée, on procède par calcul ou rabattement (13-I); en géométrie descriptive, on rend le plan AIB parallèle à un plan de projection par changement de plan, rotation ou rabattement. Sur la figure 242, on a obtenu l'angle de la droite $aba'b'$ avec le plan frontal par une rotation d'axe de bout. — Le changement de plan a déjà été employé au n° 105 et le rabattement aux n°s 144 et 200.

Dans le **cas général**, on remarque que l'angle φ est le complément de l'angle aigu θ de la droite D avec une perpendiculaire AI au plan P. On est ainsi ramené au problème précédent : angle de deux droites.

Faire les épures.

Traiter aussi, à titre d'exercice, le cas où le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection.

205. Problème. — *Mener par un point aa' une droite $aba'b'$ faisant avec le plan horizontal et le plan frontal de projection des angles donnés α, β.*

Supposons le problème résolu (fig. 243). Construisons l'angle de la droite :

1° avec le plan horizontal par une rotation autour de la verticale du point aa'; bb' vient en BB′; l'angle cherché est $a'B'h = \alpha$;

2° avec le plan frontal par une rotation autour de la droite de bout du point aa'; bb' vient en B_1B_1'; l'angle cherché est $B_1ai = \beta$.

Remarquons que ces constructions donnent l'une et l'autre la vraie grandeur du segment $aba'b'$ en $a'B'$ et aB_1; le point bb' étant quelconque sur la droite inconnue, cette longueur peut être choisie arbitrairement. Ce choix

étant fait, on est en mesure de résoudre le problème posé; on construit les deux triangles rectangles aiB_1 et $a'kB'$ connaissant l'hypoténuse et un angle. Pour marquer le point b, on remarque que sa distance à la droite ai est connue (c'est iB_1) ainsi que sa distance au point a (c'est $aB = kB'$); b est donc à l'intersection des lieux suivants :

1° deux parallèles à iB à la distance iB_1;

2° le cercle de centre a de rayon kB'.

Dans le cas de la figure, ces lieux se coupent en 4 points b, e, d, c qu'on rappelle dans le plan horizontal H'.

Discussion. — Chaque parallèle coupe le cercle si sa distance au centre est inférieure au rayon :

$$iB_1 < kB'$$

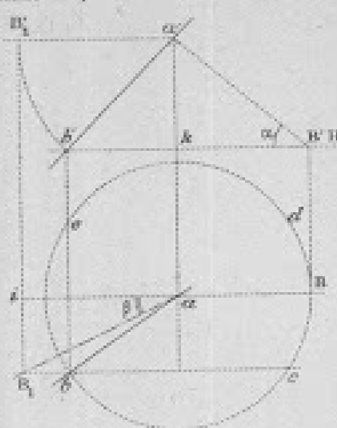


FIG. 243.

ou, en appelant l la longueur de l'hypoténuse des deux triangles rectangles aiB_1 et $a'kB'$:

$$l\sin\beta < l\cos\alpha$$

$$\sin\beta < \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles aigus

$$\beta < \frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$$

En résumé :

1°	$\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$	4 solutions.
2°	$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$	2 solutions (doubles); droites de profil.
3°	$\alpha+\beta > \frac{\pi}{2}$	aucune solution.

Angle de deux plans.

206. — Si on veut seulement la grandeur de l'angle de deux plans P et Q (fig. 244), on leur mène d'un point quelconque A les perpendiculaires AB, AC. L'angle aigu de ces deux droites est l'angle aigu des deux plans. On est ramené au problème 203.

Le plus souvent, on désire un rectiligne lui-même, puis sa vraie

grandeur et, le cas échéant, le plan bissecteur du dièdre correspondant (fig. 245). Nous allons indiquer comment on réalise ces

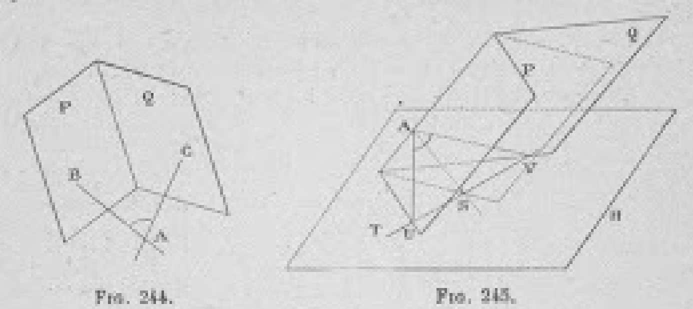


FIG. 244. FIG. 245.

constructions au moyen d'une suite d'opérations dont chacune est l'application d'un problème antérieurement étudié.

I. Géométrie cotée. — Soit les plans P, Q donnés par leurs échelles de pente (fig. 246).

1° *Intersection des deux plans :* a_2b_2.

2° *Plan du rectiligne.* On choisit un point de l'intersection comme sommet du rectiligne, a par exemple, et on construit le plan R perpendiculaire en a_2 à a_2b_2.

3° *Côtés du rectiligne.* — Ce sont les intersections du plan R avec les plans P et Q; le point a_2 appartient à chacune de ces intersections; on obtient un deuxième point sur l'une et l'autre au moyen des horizontales de cote 2 (points u_2v_2).

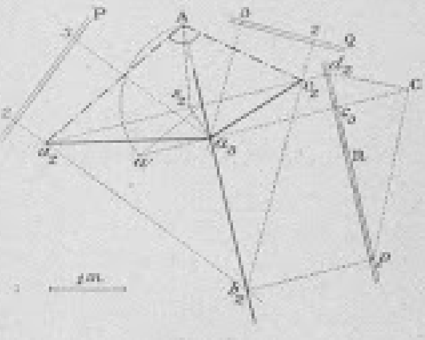


FIG. 246.

4° *Vraie grandeur du rectiligne.* — Rabattement autour de l'horizontale u_2v_2; les points u_2 et v_2 ne bougent pas; on construit le rabattement A du sommet a_2 par la règle du triangle rectangle; noter que la perpendiculaire à la charnière est toute tracée en ab, de sorte que A est sur ab. La vraie grandeur du rectiligne est uAv.

5° *Plan bissecteur du dièdre.* — On trace la bissectrice As du rectiligne rabattu uAv ; elle a pour relèvement a_2s_2 ; le plan bissecteur est $a_2b_2s_2$.

REMARQUE. — Le cas particulier où les échelles de pente des deux plans ont des projections parallèles a déjà été traité au n° 55.

II. Géométrie descriptive. — Soit les plans PαQ', RβS', donnés par leurs traces (fig. 247).

1° *Intersection des deux plans* : *mnm'n'*.

2° *Plan du rectiligne.* — On choisit son sommet *aa'* sur l'intersection ; on construit le plan perpendiculaire à *mnm'n'* en *aa'* en dirigeant la construction de manière à obtenir sa trace horizontale T : on mène d'abord la frontale *afa'f'* dont on marque la trace horizontale *ff'* ; la perpendiculaire menée de *f* à *mn* est la trace T cherchée.

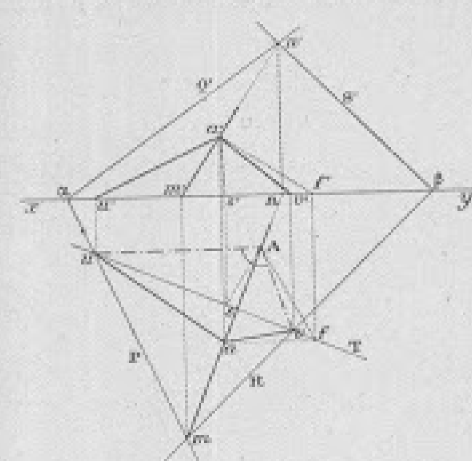


FIG. 247.

3° *Côtés du rectiligne.* — Ce sont les intersections du plan du rectiligne avec les plans donnés ; le point *aa'* appartient à chacune de ces intersections ; on obtient un deuxième point sur l'une et l'autre en prenant les points *uu'*, *vv'* communs aux traces horizontales.

4° *Vraie grandeur du rectiligne.* — Rabattement autour de l'horizontale *uu'v'v'* ; les points *uu'*, *vv'* ne bougent pas. On construit le rabattement A du sommet *aa'* au moyen de la frontale *afa'f'* ; noter que la perpendiculaire à la charnière issue de *a* est toute tracée en *mn*, de sorte que A est sur *ma*. La vraie grandeur du rectiligne est *uAv*.

5° *Plan bissecteur du dièdre.* — Comme en géométrie cotée.

207. Cas particulier. — *L'intersection des deux plans est parallèle à un plan de projection.*

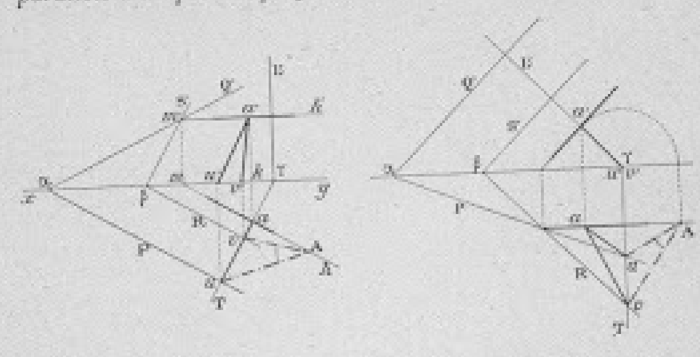


FIG. 248. FIG. 249.

Il en est ainsi quand les plans donnés ont deux traces de même nom parallèles (fig. 248 et 249). Le plan TγL' du rectiligne peut être figuré immédiatement car il est vertical ou de bout. On termine comme dans le cas général. Sur la figure **249**, on a légèrement modifié le tracé en opérant par rotation autour de la trace T du plan du rectiligne.

208. REMARQUE — Nous avons déjà indiqué comment on cherche l'angle d'un plan avec le plan horizontal (35, 139, 144). Si on veut, en géométrie descriptive, l'angle d'un plan avec le plan frontal de projection, on rend le rectiligne de leur dièdre parallèle à un plan de projection par changement de plan, rotation ou rabattement. Sur la figure 250, on a opéré par rotation autour de la trace horizontale T.

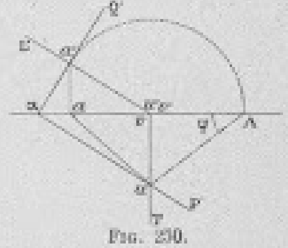


FIG. 250.

Construire un trièdre connaissant les trois faces.

209. — Nous devons supposer (G E. n°^{s} 148 et 151) que la plus grande face est inférieure à la somme des deux autres et que la somme des faces est inférieure à 4^{D}.

Prenons comme plan horizontal le plan de la plus grande face BSC et supposons les autres faces rabattues en BSA_1, CSA_2 sur le plan

horizontal, extérieurement à la première (fig. 251). Nous allons chercher la projection et la cote d'un point A de l'arête SA. Un tel point se rabat en A_1 (charnière SB) et en A_2 (charnière SC) à des

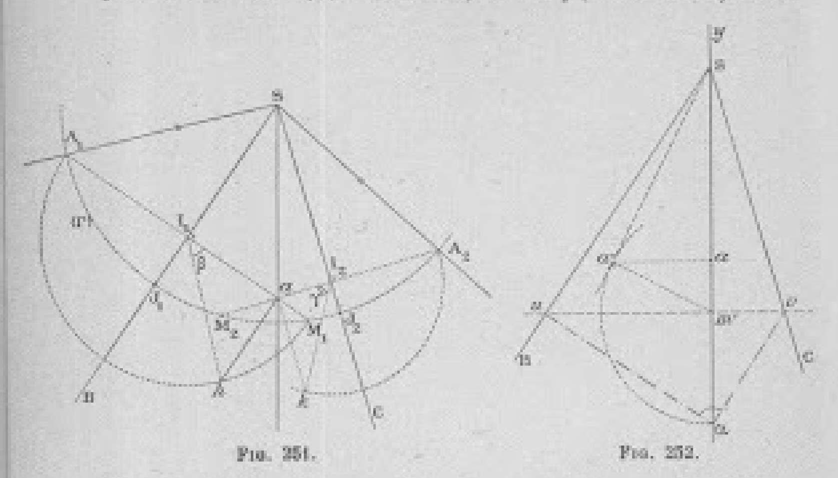


Fig. 251. Fig. 252.

distances $SA_1 = SA_2$, toutes deux égales au segment SA de l'espace : les points A_1 et A_2 sont donc sur un cercle Γ de centre S.

La projection horizontale du point A se fait sur les perpendiculaires menées des rabattements A_1 et A_2 aux charnières respectives, soit en a. Quant à la cote, on l'obtient en ak par la règle du triangle rectangle; on peut la porter soit au-dessus, soit au-dessous du plan horizontal, d'où deux trièdres symétriques l'un de l'autre.

Discussion. — On pourra construire la cote si I_1a est inférieur à I_1A_1.

Or, si on rabattait les faces BSA et CSA de façon à recouvrir la face BSC, les rabattements du point A se feraient en M_1 et M_2 dans l'angle BSC (qui est la plus grande face), et les arcs J_1M_1 et J_2M chevaucheraient (la face BSC étant inférieure à la somme des deux autres). Il en résulte que les cordes A_1M_1 et A_2M_2 du cercle Γ se coupent à l'intérieur de ce cercle. I_1a est donc inférieur à I_1A_1 : la construction de la cote de A est possible[1].

1. Refaire la figure en supposant que certaines des faces données sont des angles obtus ; dans tous les cas, les conditions énoncées sont suffisantes pour que la construction soit possible.

Il faut observer que la construction faite à partir du rabattement A_2 fournit la même cote; on a en effet :

$$\overline{ak}^2 = -\overline{aA_1} \times \overline{aM_1}; \qquad \overline{ak}^2 = -\overline{aA_2}\cdot\overline{aM_2}$$

et les seconds membres sont égaux (puissance de a par rapport à Γ).

En résumé, si 3 angles satisfont à la double condition rappelée au début, on peut construire deux trièdres symétriques l'un de l'autre, ayant pour faces ces trois angles.

210. — Détermination des dièdres.

1° *Dièdre d'arête* SB. On en a un rectiligne en β, dans le triangle rectangle précédemment construit.

2° *Dièdre d'arête* SC. On en a de même un rectiligne en γ.

3° *Dièdre d'arête* SA. Prenons comme plan frontal de projection le plan vertical contenant SA (fig. 252); la projection frontale de SA est Sa' (aa' = cote de A); le plan du rectiligne cherché est le plan de bout $a'm'$, dont la trace horizontale coupe en u et v les arêtes SB et SC. Ce rectiligne a pour projection horizontale uav (qu'il est inutile de tracer) et il est rabattu en $u\alpha v$.

LIVRE IV

PROBLÈMES SIMPLES SUR QUELQUES SOLIDES USUELS

CHAPITRE I. — POLYÈDRES USUELS

211. Ponctuation. — Nous avons déjà signalé (103) qu'on ponctue la projection d'un objet en supposant l'observateur placé extrêmement loin du plan de projection dans la direction normale à ce plan; les rayons visuels de cet observateur sont des projetantes et l'aspect de l'objet se confond avec sa projection; on représente les parties vues en trait continu et les parties cachées en points ronds (fig. 253).

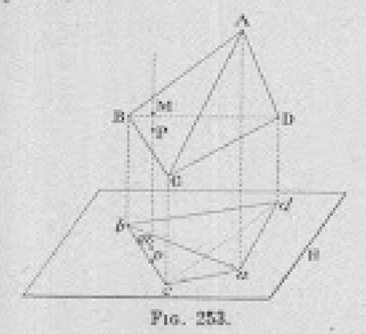


Fig. 253.

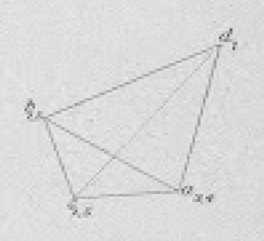


Fig. 254.

Si cet objet est, par exemple, un polyèdre convexe, un rayon visuel le rencontre en deux points M, P dont l'un M, situé du côté de l'observateur, est vu et l'autre caché. L'ensemble des faces vues est séparé de l'ensemble des faces cachées par le *contour apparent* dont la projection limite, sur l'épure, la région où se projettent les points du solide. Les arêtes du contour apparent sont toujours vues. Une arête quelconque est entièrement vue ou bien entièrement cachée.

Exemple. — La figure 254 représente la projection cotée d'un étraèdre; la ponctuation se comprend aisément.

212. Représentation d'un cube.

Problème. — *Représenter un cube ayant une diagonale verticale, coupé par le plan horizontal du centre.*

Ayant d'abord représenté le cube avec ses faces parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection (fig. 255, épure xy) nous avons rendu la diagonale AGA'G' de front par un changement de plan frontal (épure x_1y_1); nous l'avons ensuite rendue verticale par un changement de plan horizontal (épure x_2y_2).

On retrouve graphiquement les propriétés suivantes, qu'il est facile d'établir géométriquement :

Le contour apparent est un hexagone régulier;

la section par le plan médiateur d'une diagonale est un hexagone régulier (elle n'est pas tracée sur l'épure);

une diagonale est axe de symétrie ternaire (coïncidence par rotation de $\frac{2\pi}{3}$).

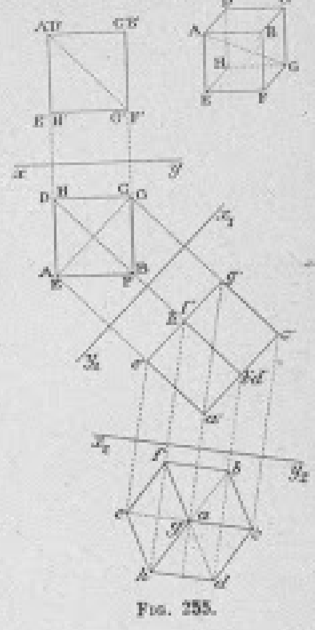


Fig. 255.

213. — Intersection d'un prisme et d'une droite.

Problème. — *La base d'un prisme droit est donnée par son plan d'échelle de pente* P *et sa projection* (fig. 256).

1° *Représenter ce prisme connaissant la longueur* l *de ses arêtes latérales;*

2° *Trouver les points d'intersection de ce prisme avec une droite* D.

La construction habituelle donne l'intervalle gh des arêtes latérales qui sont, par hypothèse, perpendiculaires au plan P. La longueur donnée l (non figurée) vaut $Gh \times 6{,}6$; la cote du sommet A est donc 11,6.

Pour construire les points où la droite D perce le prisme, on fait passer par cette droite un plan auxiliaire dont l'intersection avec le

prisme s'obtienne commodément; c'est le plus souvent le plan parallèle aux arêtes; il est défini sur l'épure par la parallèle aux arêtes issue du point 13 de la droite D; il coupe la surface latérale du prisme suivant deux parallèles aux arêtes, que l'on a déduites des points u, v où le polygone de base est coupé par l'intersection $i_1 j_2$ du

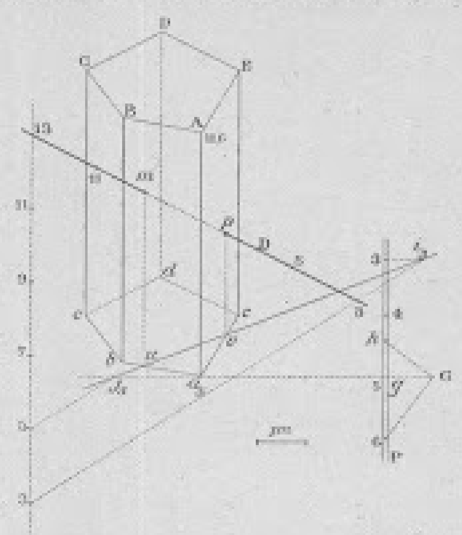


Fig. 256.

plan auxiliaire et du plan de base. Les deux parallèles aux arêtes issues de u et v coupent la droite D aux points m et p cherchés; on déterminera aisément leurs cotes au moyen de la graduation de la droite D.

214. Remarque. — La même méthode s'emploie pour chercher les points où une droite rencontre une pyramide; on prend alors comme plan auxiliaire le plan passant par la droite et le sommet de la pyramide.

215. — Section plane d'une pyramide.

Problème. — *Une pyramide est donnée par son sommet ss' et sa base, située dans un plan de bout P*α*Q' (fig. 257); construire son intersection avec un plan défini par sa trace horizontale* T *et un point mm' de l'arête sas'a'.*

Cherchons d'abord l'intersection du plan sécant et du plan de base. Un premier point de cette droite est uu', commun aux traces horizontales des deux plans. Pour en obtenir un deuxième, on prend une

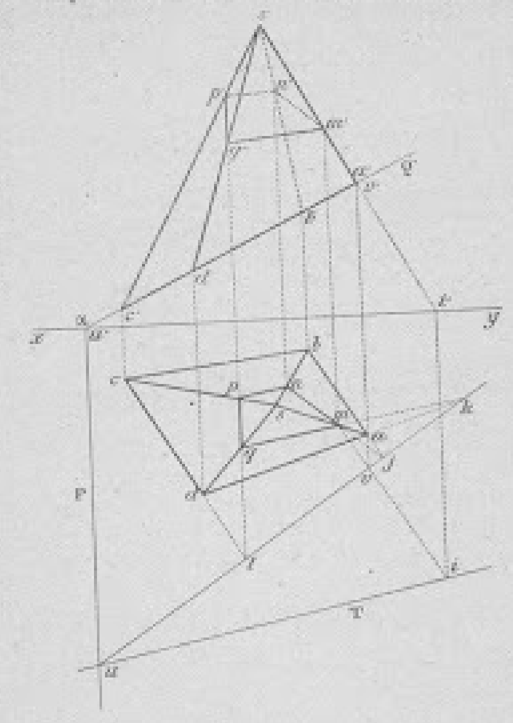


Fig. 257.

droite $mm'i'$ dans le plan sécant et on marque le point vv' où elle perce le plan de base PαQ'.

Cherchons maintenant l'intersection du plan sécant avec la face $sabs'a'b'$: un premier point est mm'; l'autre s'obtient en prenant pour plan auxiliaire le plan de base PαQ'; sa projection horizontale est en j sur ab et uv; ayant ainsi un premier côté mn de l'intersection, on opère de même pour avoir mq, puis pq (au moyen des points k, l de uv). On termine en rappelant $mnpq$.

216. Remarque. — Cette méthode est générale et s'applique également à la recherche de la section plane d'un prisme; elle nécessite la construction préalable d'un sommet mm' de la section plane et de la droite $uu'v'$ d'intersection du plan sécant et du plan de base.

CHAPITRE II. — LA SPHÈRE

217. Représentation de la sphère. — Contour apparent. L'observateur étant placé, comme il a été dit, à l'infini sur une projetante, un rayon visuel est porté par une projetante et peut rencontrer la sphère en deux points A, B (fig. 258). Le point A qui est du côté de l'observateur est vu et l'autre, B, est caché. Il y a ainsi sur la sphère une région vue et une région cachée; elles sont séparées par le grand cercle de contact du cylindre circonscrit ayant pour génératrices des projetantes. Ce grand cercle s'appelle **contour apparent**.

En géométrie cotée, on représente une sphère par les projections cotées de son centre et de son contour apparent (fig. 259). Leur cote est la même.

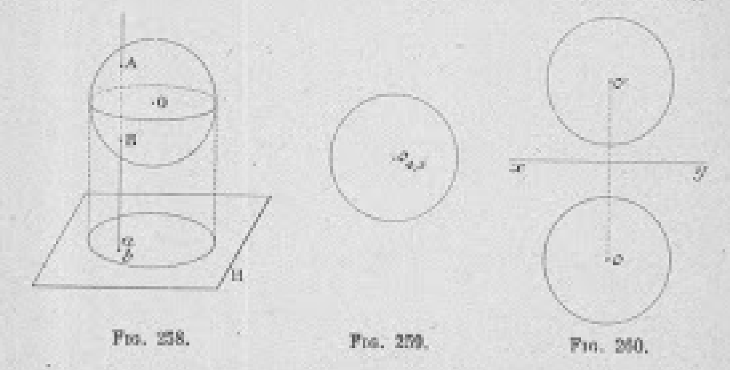


Fig. 258. Fig. 259. Fig. 260.

En géométrie descriptive, on représente une sphère par les projections de son centre et de chacun de ses contours apparents (fig. 260).

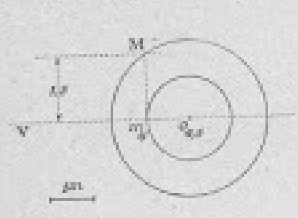
218. Parallèles et méridiens. — On appelle **parallèles** les cercles de section de la sphère par des plans parallèles à un plan de projection; ils se projettent sur ce plan en vraie grandeur suivant des cercles concentriques à la projection du contour apparent.

On appelle **méridiens** les grands cercles de section de la sphère

par des plans diamétraux perpendiculaires à un plan de projection.

219. Problème. — *Construire la projection horizontale d'un parallèle de cote donnée d'une sphère.*

Il suffit d'en construire un point. On l'obtient, en **géométrie cotée** (fig. 261) par le rabattement du plan V d'un méridien vertical sur le plan horizontal du centre. Le rabattement du méridien coïncide avec le contour apparent; l'horizontale de cote 6 (cote donnée) du plan V se rabat suivant une parallèle à la droite V à la distance $6 - 4,5 = 1,5$. L'un des points M où elle coupe le contour apparent est sur le parallèle cherché; on achève en le relevant en m_6.



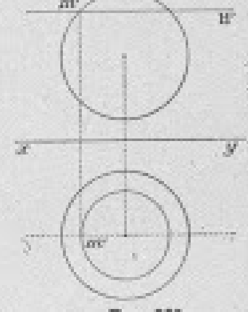


Fig. 261. Fig. 262.

En **géométrie descriptive** (fig. 262), on marque aisément l'un des points mm' de rencontre du plan horizontal H' de cote donnée avec le contour apparent frontal.

Le tracé corrélatif permet d'obtenir la projection frontale du parallèle d'éloignement donné (faire l'épure).

220. Problème. — I. Géométrie cotée. *Connaissant la projection m d'un point d'une sphère, trouver sa cote et construire le plan tangent en ce point* (fig. 263).

On rabat le méridien vertical V contenant le point cherché; son rabattement coïncide avec le contour apparent et donne le rabattement M de m. Si $mM = 1,2$, la cote de m est $2 + 1,2 = 3,2$ ou $2 - 1,2 = 0,8$. Il y a deux solutions.

Le plan tangent au point $m_{3,2}$ est défini par les tangentes $m_{3,2}\,h_{3,2}$ et $m_{3,2}\,t_2$ au parallèle et au méridien du point $m_{3,2}$. Cette dernière droite $m_{3,2}\,t_2$ a été obtenue à l'aide de son rabattement Mt; elle est l'échelle de pente du plan tangent.

II. — Géométrie descriptive. — *Connaissant l'une des projections m d'un point d'une sphère, construire l'autre projection et le plan tangent en ce point.*

Sur la figure 264, on a utilisé le parallèle de front passant par le point donné. Sur la figure 265, on a rabattu, comme en géométrie cotée, le

méridien vertical passant par le point donné ($m' = mM$). Dans les deux cas, il y a deux solutions; nous avons choisi le point vu en projection horizontale.

Le plan tangent est perpendiculaire en mm' au rayon $om\, o'm'$; il est défini par une horizontale $mh\, m'h'$ et une frontale $mf\, m'f'$ ($mh \perp om$, $m'f' \perp o'm'$).

221. Problèmes sur les plans tangents.

Construire les plans tangents à une sphère parallèles à un plan donné P.

On mène le diamètre perpendiculaire au plan P et on cherche ses

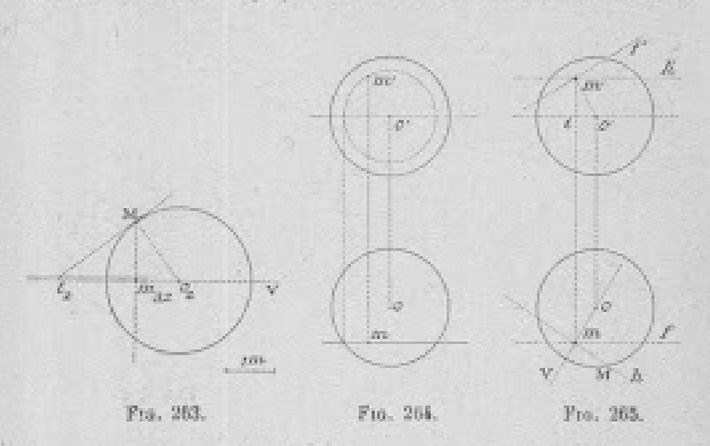


Fig. 263. Fig. 264. Fig. 265.

extrémités en rabattant son plan projetant sur le plan de contour apparent.

En **géométrie cotée** (fig. 266), on figure d'abord le plan vertical V projetant le diamètre perpendiculaire au plan P, puis on le rabat sur le plan de contour apparent; les points de contact A, B, sont sur le diamètre perpendiculaire au rabattement M N de l'intersection m_2n_2 des plans V et P. On termine en relevant les points A et B (il reste, sur la figure 266, à chercher leurs cotes).

En **géométrie descriptive** la marche est la même; sur la fig. 267, le plan donné est défini par une horizontale DD' et une frontale $\Delta\Delta'$.

II. — **Construire les plans tangents à une sphère issus d'une droite donnée D.**

Soit I le point de rencontre de la droite D avec le plan diamétral qui lui est perpendiculaire (fig. 268); on cherche les points de contacts A, B des tangentes issues de I au grand cercle contenu dans ce plan diametral (rabattement sur le plan de contour apparent); ce sont les points de contact des plans tangents cherchés.

En **géométrie cotée** (fig. 269) on construit le plan P issu de o_3 et perpendiculaire à la droite D; on cherche ensuite son point d'intersection $i_{1,1}$ avec cette droite; on rabat ce plan autour de l'horizontale de cote 3, laquelle passe par le centre; on trace les tangentes issues de I au grand cercle rabattu et on relève leurs points de contact A, B en a, b au moyen des points fixes j, k de la charnière; on terminera en cherchant les cotes des points a, b.

En **géométrie descriptive** (fig. 270) le plan diamétral perpendiculaire à DD' est $ofho'f'h'$ et son pied est ii'; on rabat ce plan autour de $oho'h'$; ii' vient en I (règle du triangle rectangle); on trace les tangentes IA, IB au

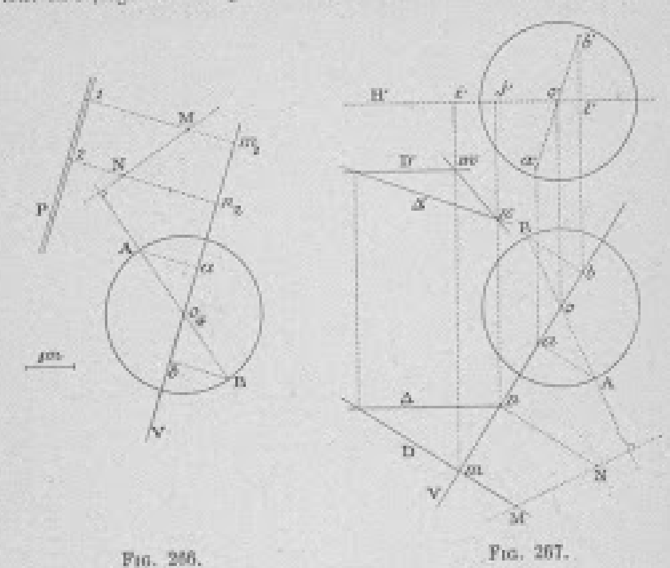


Fig. 266. Fig. 267.

grand cercle rabattu et on termine comme en géométrie cotée (relèvement de A et B par recoupements).

222. Intersection d'une droite et d'une sphère.

Pour déterminer les points de rencontre d'une droite D et d'une sphère, on fait passer par la droite un plan auxiliaire, par exemple le plan diamétral, et on rabat ce plan sur le plan de contour apparent; le grand cercle de section a pour rabattement le contour apparent; il est coupé par le rabattement de la droite aux points cherchés A, B; on termine en relevant ces points.

En **géométrie cotée** (fig. 271), la droite donnée D est définie par les points $m_5\, p_4$; la charnière est $o_4\, p_4$; le point p_4 reste immobile; le point m_5 est rabattu en M au moyen du triangle rectangle imm'.

En **géométrie descriptive** (fig. 272), la droite donnée est DD'; la charnière est $opo'p'$; le point pp' reste immobile; le point mm' est rabattu en M au moyen du triangle rectangle imm_1.

Exercice. — Refaire ces épures en prenant pour plan auxiliaire le plan vertical (ou de bout) projetant la droite. On verra l'avantage de la méthode précédente, dans laquelle le cercle rabattu est tout tracé.

Section plane d'une sphère.

223. Méthode. — 1° Pour obtenir les *axes de la projection*, on détermine d'abord le centre et le rayon de la section plane à l'aide du plan diamétral vertical (ou de bout) perpendiculaire au plan sécant ; il est plan de symétrie

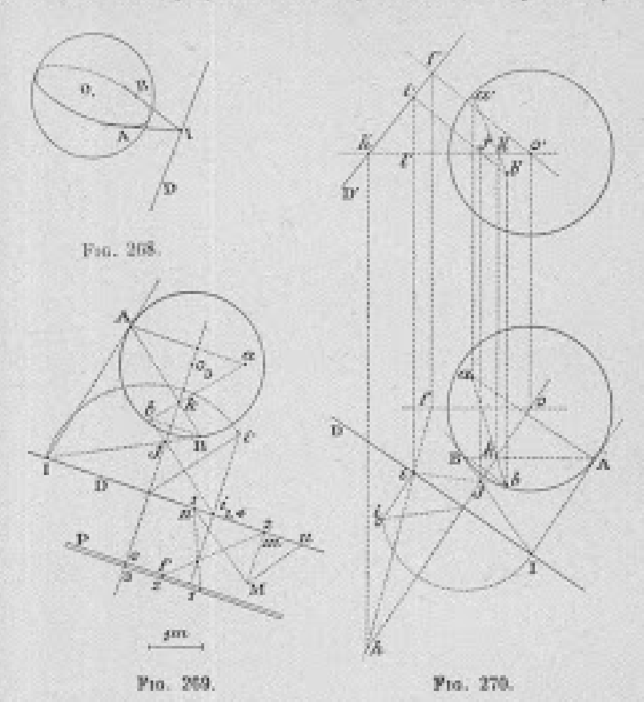


FIG. 268.

FIG. 269.

FIG. 270.

pour toute la figure et en particulier pour la section plane; on le rabat sur le plan de contour apparent horizontal (ou frontal). On continue comme il a été indiqué précédemment (n° 196).

2° Pour obtenir *un point quelconque de la section plane et la tangente*, on coupe la sphère et le plan sécant par un plan auxiliaire horizontal (ou de front); chacun des points communs au cercle et à la droite obtenus est sur la section plane; la tangente à cette section plane en ce point est l'intersection du plan tangent à la sphère en ce point avec le plan sécant.

224. Géométrie cotée. — Sur la figure 273, le plan diamétral vertical perpendiculaire au plan donné d'échelle de pente P est V; l'intersection des deux plans est $i_4\,j_5$, rabattue en iJ sur le plan de contour apparent; le méridien contenu dans le plan V a pour rabattement le contour apparent; la corde AB découpée par ce cercle sur iJ est un diamètre de la section plane (celui qui est porté par une ligne de pente); le milieu Ω de AB est

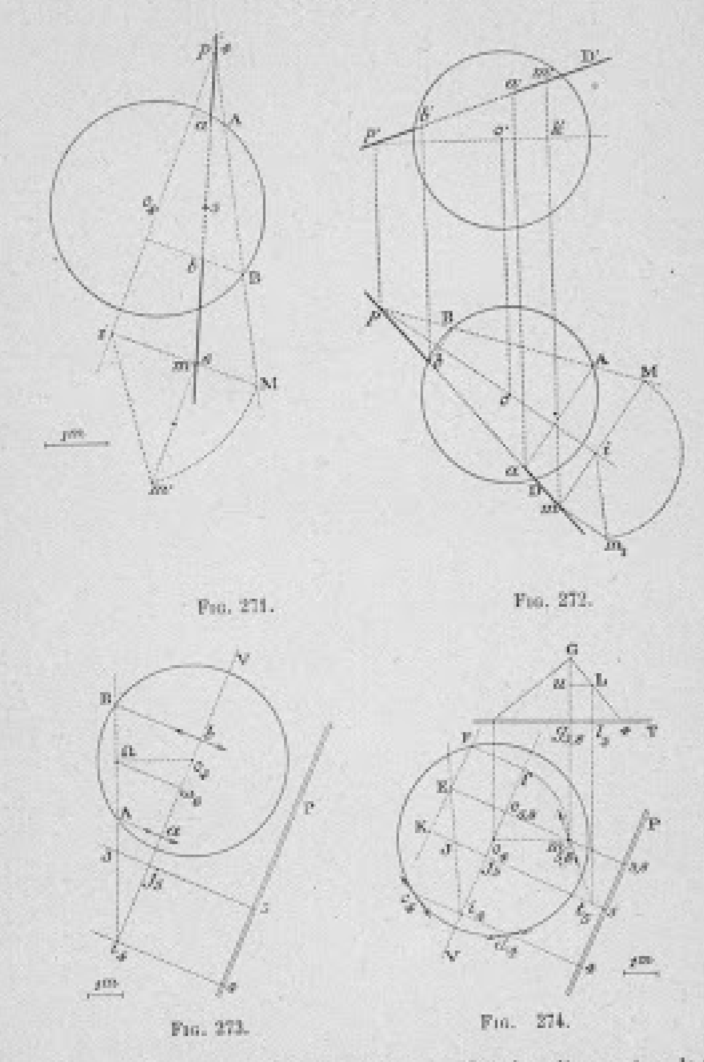


FIG. 271.

FIG. 272.

FIG. 273.

FIG. 274.

le centre de la section plane et son rayon est ΩA ; le relèvement ω_s de Ω est le centre de la projection de la section plane.

Rappelons que les relèvements a, b de A et B sont les sommets du petit axe de cette projection.

Sur la figure 274, on a coupé le plan sécant P et la sphère par le plan horizontal R de cote $_{5,8}$: le rabattement du plan V (utilisé à l'alinéa précédent) sur le plan de contour apparent donne d'une part le point $e_{5,8}$ de l'horizontale commune aux plans P et R et d'autre part le point $f_{5,8}$ du parallèle contenu dans le plan R. L'un des points communs à cette droite et à ce cercle est $m_{5,8}$; c'est un point de la section plane.

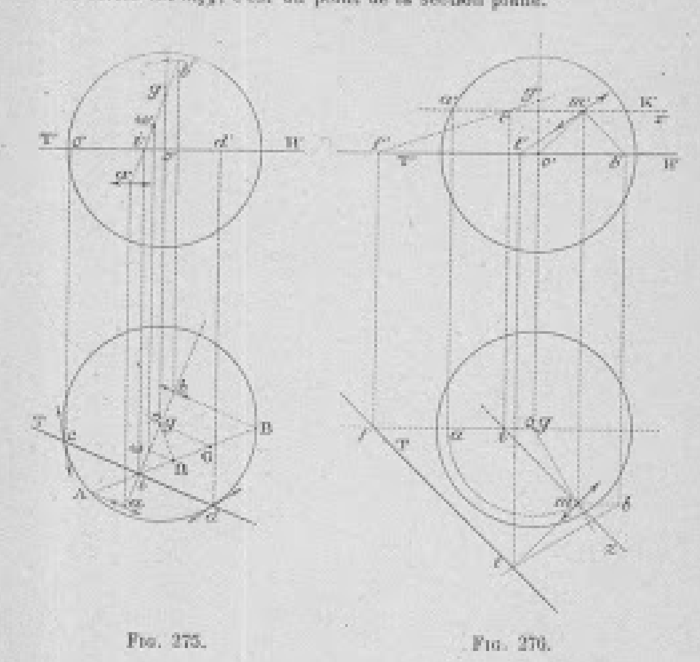


Fig. 275. Fig. 276.

Pour obtenir la tangente en ce point, on a construit l'échelle de pente T du plan tangent à la sphère en $m_{5,8}$; ce plan est perpendiculaire au rayon $o_1 m_{5,8}$ en $m_{5,8}$; le rabattement du plan vertical de trace T sur le plan horizontal de cote 4 a fourni les points de cote 4 et 5 de cette échelle de pente ; les horizontales de cote 5 des plans P et T donnent le point t_5 de la tangente en $m_{5,8}$ à la section. — On peut aussi chercher, comme au n° 220, I, la trace du plan tangent sur le plan horizontal du centre ; l'intersection de cette trace et de l'horizontale de cote 4 du plan P est un point de la tangente cherchée.

La même méthode donne les points c_4, d_4 de la section situés sur le contour apparent ; le plan tangent à la sphère étant vertical, les projections

de la section plane et du contour apparent ont même tangente en chacun de ces points.

225. Géométrie descriptive. — Pour simplifier les tracés, on a supposé le plan sécant défini par sa trace TT' sur le plan de contour apparent horizontal et son point gg' d'intersection avec la verticale du centre de la sphère.

Sur la figure 275, on a encore rabattu le même plan V sur le plan H' de contour apparent horizontal ; son intersection avec le plan sécant a pour rabattement iG ; le méridien contenu dans le plan V a pour rabattement le contour apparent horizontal ; la corde AB de ce cercle portée par la droite iG est un diamètre de la section plane ; le milieu Ω de AB est le centre de la section plane et son rayon est ΩA ; le relèvement $\omega\omega'$ de Ω est le centre de la section plane.

Rappelons que les relèvements aa', bb' de A et B sont les sommets du petit axe de la projection horizontale de la section ; les tangentes en ces points sont horizontales.

Sur la figure 276, le plan auxiliaire horizontal K' coupe le plan donné suivant l'horizontale xi $i'x'$ et la sphère suivant le petit cercle passant par $\alpha\alpha'$; on obtient ainsi le point mm' de la section plane ; le plan tangent à la sphère en ce point est perpendiculaire au rayon om, $o'm'$; on a marqué successivement sa frontale $mbm'b'$ ($m'b' \perp o'm'$), le point bb' trace de cette droite sur le plan H', et la droite $btb't'$ trace du plan tangent sur le plan H' ($bt \perp om$) ; cette droite rencontre TT' en un point tt' qui appartient à la tangente en mm' à la section plane.

Les points cc' et dd' (fig. 275) communs à la droite TT' et au contour apparent horizontal appartiennent à la section plane ; les plans tangents à la sphère en cc', dd' étant verticaux, la projection horizontale de la section est tangente au contour apparent horizontal en c et d.

Chercher, à titre d'exercice, les points sur le contour apparent frontal.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Les Figures élémentaires en géométrie cotée.

1. — On donne les projections cotées des sommets d'un triangle; trouver celle du point de rencontre des médianes.

2. — On donne les projections cotées des sommets ABC d'un quadrilatère plan et la projection du 4e sommet D; trouver sa cote.

3. — Trouver la cote du point de rencontre de deux droites dont les projections sont confondues : 1° par une construction; 2° par le calcul.

4. — Par un point donné mener une droite de pente donnée qui rencontre

1° soit une droite donnée D. Cas particuliers : D est verticale; D est horizontale.

2° soit un cercle donné dans le plan horizontal.

5. — On donne deux points A, B du plan horizontal et la projection graduée d'une droite Δ; trouver sur cette droite un point M, tel que le rapport des segments MA et MB ait une valeur donnée k. — Cas particulier : $k = 1$.

6. — Par un point donné mener une droite de pente connue p parallèle à un plan donné par son échelle de pente.

7. — Étant donné deux points A, B et une droite D, mener par la droite un plan dont A et B soient équidistants. (Deux cas, suivant que le plan laisse, ou non, les deux points d'un même côté.)

Application. — Trouver un plan dont 3 points donnés A, B, C soient équidistants.

8. Généralisation. — Étant donné deux points A, B et une droite D, mener par la droite un plan tel que le rapport des distances de A et B à ce plan ait une valeur donnée.

Application. — Trouver un plan tel que les distances à ce plan de 3 points donnés A, B, C soient proportionnelles à des nombres donnés.

9. — Chercher l'intersection de deux plans dont les horizontales de même cote se coupent en dehors de l'épure.

10. — Par une droite donnée, faire passer un plan qui coupe un plan donné P suivant une horizontale. (On se donnera le plan P par son échelle de pente.)

11. — Par un point donné mener une droite s'appuyant sur deux droites données.

12. — Par un point donné mener une droite de direction donnée s'appuyant sur deux droites données.

13. — Par un point donné, mener une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur une droite donnée :

1° la droite donnée est horizontale, le plan est quelconque

2° le plan donné est vertical, la droite est quelconque.

14. — Étant donné une droite D et une horizontale H, trouver un segment horizontal de longueur donnée dont les extrémités appartiennent respectivement à ces deux droites.

15. — Déterminer le plan symétrique d'un plan donné P relativement à un point donné O.

16. — Étant donné deux plans P et Q, trouver un segment horizontal dont les extrémités appartiennent respectivement à ces deux plans et dont le milieu soit un point donné O.

Ombres.

17. — Lorsqu'un rayon lumineux rencontre un point M, puis une surface opaque, le plan horizontal de comparaison par exemple, en un point μ, on dit que μ est l'ombre de M, — ombre au flambeau si la source lumineuse S est à distance finie (fig. 277), ombre au soleil si les rayons lumineux sont parallèles à une direction L (fig. 278).

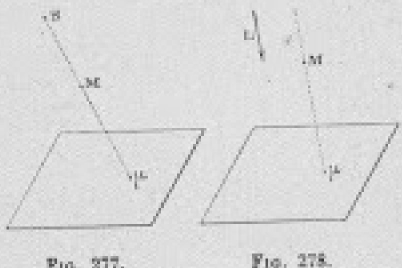


Fig. 277. Fig. 278.

Dans le cas de l'exemple, μ est la trace du rayon lumineux (μ n'est physiquement l'ombre de M que si le rayon lumineux rencontre M avant μ).

L'ombre d'une ligne est la ligne formée par les différents points de cette ligne.

Ombre d'une droite sur un plan; c'est en général une droite, exceptionnellement un point.

Ombre d'un polygone sur un plan; elle est limitée par l'ombre du contour du polygone.

18. — Ombre au soleil d'un parallélogramme ABCD (plaque opaque) sur le plan horizontal.

La projection du parallélogramme, $a_2b_1c_3d$ (unité : cm) est un rectangle de 2cm sur 3cm ($ab = 2$cm) et l'ombre du point A se fait au centre du rectangle *abcd*.

19. — Ombre au flambeau d'un triangle ABC. *abc* est un triangle rectangle $ab = 2$cm; $ac = 3$cm. On cote a_3, b_4, c_3. Le point lumineux se projette en *s*, 4e sommet du rectangle dont *a*, *b*, *c*, sont 3 sommets, et il a pour cote 6cm. Construire l'ombre portée sur le plan horizontal.

20. — On donne un quadrilatère ABCD situé dans un plan vertical V. Trouver l'ombre qu'il porte sur un plan P ayant même trace horizontale que le plan V (On donne P par son échelle de pente).

21. — Ensemble de 2 plaques opaques; l'une est un parallélogramme ABCD, l'autre un triangle EFG.

O est le centre de la feuille, Ox est dirigé suivant le grand axe vers la droite,

Oy suivant le petit axe vers le bas. Les sommets des plaques sont définis par les coordonnées x, y de leurs projections et leur cote : (unité cm)

A	2,5	0	7	E	0	5	0
B	2,5	7	10	F	8	5	0
C	6	8	8	G	6,5	1,8	10

Les rayons lumineux se projettent parallèlement à ω et sont inclinés à 45° sur le plan horizontal, de haut en bas dans le sens ωz.

Droites et plans perpendiculaires.

Construire le symétrique d'un point :

22. — 1° par rapport à un plan donné;

23. — 2° par rapport à une droite donnée.

Mener par un point donné une droite orthogonale à une droite donnée et

24. — 1° qui soit parallèle à un plan donné;

25. — ou 2°, qui ait une pente donnée.

26. — Trouver sur une droite donnée un point équidistant de deux points donnés.

27. — Déterminer le lieu des points équidistants de 3 points donnés.

28. — On donne une droite D et un plan P. Par leur point d'intersection, mener dans le plan une droite perpendiculaire à D.

29. — On donne la projection d'un angle droit; l'un des côtés étant gradué, graduer l'autre.

30. — On donne les projections de deux droites et la projection graduée de leur perpendiculaire commune : graduer les deux droites.

31. — Construire l'échelle de pente du plan symétrique du plan horizontal par rapport à un plan donné.

Les figures élémentaires en géométrie descriptive.

32. — L'unité étant le centimètre, représenter les points de coordonnées

A $\begin{cases} x = 1 \\ e = 2{,}5 \\ c = 3{,}2 \end{cases}$ B $\begin{cases} x = 0 \\ e = -3{,}1 \\ c = +3{,}1 \end{cases}$ C $\begin{cases} x = -1 \\ e = +1{,}7 \\ c = -3{,}2 \end{cases}$ D $\begin{cases} x = -3 \\ e = -2 \\ c = -4. \end{cases}$

33. — Trouver, sur une droite donnée, un point dont l'éloignement soit double de la cote.

34. — On considère deux droites D et Δ telles que, sur l'épure, la projection horizontale de chacune et la projection frontale de l'autre soient portées par la même droite. Ces droites sont-elles dans un même plan?

35. — Représenter un triangle ayant un côté horizontal et un côté de bout.

36. — Mener par un point
du 2° dièdre, une horizontale et chercher ses traces.
— 3° — frontale et chercher ses traces.
— 4° — droite de profil et chercher ses traces.

37. — Par un point donné, mener une droite de profil connaissant le rapport des distances de ses traces à la ligne de terre.

38. — On donne une droite par ses projections D, D'. Mener par un point donné une droite qui la rencontre en un point du 2° bissecteur.

39. — Mener par un point donné une horizontale et une frontale s'appuyant sur une droite donnée.

40. — Représenter un triangle ABC, AB étant de front dans le 1er dièdre et C dans le 4° dièdre. Construire son intersection avec le plan horizontal; ponctuer en supposant le plan horizontal opaque.

41. — On donne les projections de 3 sommets A, B, C d'un hexagone plan et la projection horizontale des autres sommets, D, E, F. Achever l'épure de l'hexagone.

42. — Représenter un parallélogramme ayant un côté horizontal et un côté de front.

43. — Construire une frontale, puis une droite quelconque, s'appuyant sur deux droites de bout et une droite quelconque données.

Construire un segment horizontal de longueur donnée dont les extrémités appartiennent respectivement à deux droites données D et Δ :

44. — L'une des droites est verticale.

45. — Les deux droites ont leurs projections horizontales parallèles.

46. — Les deux droites sont concourantes.

47. — Les deux droites sont quelconques.

48. — Mener une droite de bout et une verticale s'appuyant sur deux droites données.

49. — On donne par ses projections un angle MAN d'un triangle ABC; représenter le triangle sachant que le côté BC est porté par une frontale d'éloignement donné.

Construire une horizontale, une frontale, une droite quelconque, et les traces (si elles ne sont pas données) d'un plan :

50. — Le plan est défini par deux droites parallèles à xy;

51. — Le plan est défini par deux droites issues d'un point de xy;

52. — Le plan est défini par un point du plan horizontal et une droite quelconque;

53. — Le plan est défini par un point du 2° bissecteur et une frontale;

54. — Le plan est défini par deux droites dont les projections horizontales sont confondues;

55. — Le plan est défini par une droite de profil et un point.

56. — Le plan a ses traces, sur l'épure, portées par la même droite.

57. — Le plan est défini par deux droites telles que, sur l'épure, la projection horizontale de chacune coïncide avec la projection frontale de l'autre.

58. — Le plan passe par un point donné aa'; il est parallèle à xy et à une droite de profil donnée.

59. — Un plan est défini par deux droites concourantes. Comment peut-on reconnaître s'il est : de bout? vertical? parallèle à xy? parallèle au 1er ou au 2° bissecteur?

Construire les traces d'un plan :

60. — Le plan est défini par une droite de profil rencontrant xy et un point quelconque.

61. — Le plan est défini par une droite du 2° bissecteur et un point du plan horizontal.

62. — Le plan est défini par un point dans le plan frontal, un point dans le plan horizontal et un point dans le 2e bissecteur.

63. — Reconnaître si une droite appartient à un plan défini par xy et un point aa'.

Mener par un point le plan parallèle à un plan donné

64. — 1° défini par xy et un point; cas particulier : il s'agit du bissecteur du 1er dièdre.

65. — 2° dont les traces, sur l'épure, sont portées par la même droite.

66. — Par un point aa' du 1er dièdre, mener un segment ayant pour milieu ce point et dont les extrémités appartiennent respectivement au plan horizontal de projection et à une droite donnée dans le plan frontal de projection.

67. — On donne la projection horizontale abc d'un triangle ABC situé dans un plan $P\alpha Q'$: bc est parallèle à αP et $ab = ac$. Construire la projection frontale. Que peut-on dire du triangle ABC?

Exemples d'intersection de deux plans.

68. — On connaît un point aa' de l'intersection; l'un des plans passe par xy, l'autre par une droite DD' du plan frontal de projection.

69. — L'un est défini par xy et un point aa', l'autre par un point bb' de xy et une droite quelconque.

70. — L'un est donné par deux droites principales HH' et FF'; l'autre passe par un point aa' du second bissecteur et par une droite DD' dont les projections sont confondues, D avec F, et D' avec H'.

71. — L'un est donné par ses traces $P\alpha Q'$, l'autre par deux droites concourantes DD' et ΔΔ', D et D' étant respectivement confondues avec αP et $\alpha Q'$.

72. — L'un est parallèle à xy; l'autre est défini par xy et un point.

73. — L'un passe par xy; l'autre a, sur l'épure, ses traces confondues.

74. — L'un est défini par ses traces; le deuxième par deux droites telle que la projection horizontale de chacune est confondue avec la projection frontale de l'autre.

75. — L'un est le 2e bissecteur; l'autre est défini comme au n° précédent.

76. — La trace horizontale de chacun et la trace frontale de l'autre sont portées, sur l'épure, par la même droite.

77. — Les deux traces de chacun sont portées, sur l'épure, par la même droite.

78. — On connaît la trace horizontale de l'un, la trace frontale de l'autre et un point de l'intersection.

79. — L'un est défini par un point aa' et une droite ΔΔ' du second bissecteur, l'autre est défini par une ligne de pente (relative au plan H) issue de aa'.

80. — Par une droite donnée faire passer un plan qui coupe un plan $P\alpha Q'$ suivant une frontale.

81. — Intersection de 3 plans : l'un est parallèle à xy; un autre est défini par xy et un point; le 3e est de bout.

82. — On donne les projections aa' d'un point d'une droite AB et la projection horizontale b du point B. Achever l'épure de façon que la droite soit parallèle à un plan donné.

83. — Étant donné deux plans, mener par un point de l'un une droite parallèle à l'autre.

84. — On donne, par leurs traces, deux plans parallèles à xy. A quelle condition ces deux plans sont-ils parallèles?

Exemples d'intersection d'une droite Δ et d'un plan :

85. — La droite est horizontale; le plan est défini par xy et un point.

86. — La droite est frontale; les traces du plan sont, sur l'épure, portées par la même droite.

87. — Le plan est défini par un point A et une droite D; la droite Δ a chacune de ses projections confondue, sur l'épure, avec la projection de nom contraire de la droite D.

Mener par un point donné une droite s'appuyant sur deux droites données D et Δ :

88. — L'une des droites est xy, l'autre est de profil;

89. — D et Δ sont de profil.

90. — L'une est de profil, l'autre est dans le 2e bissecteur.

91. — Le point a ses projections confondues et les droites se trouvent chacune dans un des plans de projection.

Mener une droite de direction donnée L s'appuyant sur deux droites données D et Δ :

92. — La droite D est verticale, Δ est quelconque.

93. — La direction L est celle de xy; D et Δ sont quelconques.

Mener par un point donné une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur une droite donnée :

94. — La droite donnée est xy; le plan a, sur l'épure, ses traces confondues.

95. — Le plan est de bout, la droite est de profil.

96. — Le plan est un des plans de projection, la droite est de profil.

97. — Le plan est un des plans bissecteurs, la droite est quelconque (Cht de plan).

98. — La droite est verticale, le plan est quelconque.

99. — Le plan est donné par ses traces, la droite est dans le second bissecteur.

100. — Le plan est un des bissecteurs, la droite est de bout.

101. — Étant donné un angle polyèdre convexe SABCD (défini, par exemple, sur l'épure, par son sommet ss' et les traces horizontales des arêtes), le couper par un plan de façon que la section soit un parallélogramme.

Ombres. — Voir le n° 17 aux exercices.

102. — Le plan H étant supposé seul opaque, une figure (A) donne sur lui une ombre (A_1); le plan F étant supposé seul opaque, la figure (A) donne sur lui une ombre (A_2); les ombres A_1 et A_2 coupent xy aux mêmes points.

Les deux plans H et F étant supposés opaques, l'ombre physique d'un corps placé dans le 1er dièdre comprend la partie de A_1 située en avant de F et la partie de A_2 située au dessus de H : cette partie de A_2 s'appelle relèvement de l'ombre sur le plan frontal.

103. — Ombre au soleil d'un segment AB. Le segment est situé dans le 1er dièdre; l'ombre du milieu I de AB se fait en un point I_1 de xy. Les plans de projection sont supposés opaques.

104. — Ombre au flambeau d'un segment AB. Les points A et B et le point lumineux S sont donnés par leurs coordonnées (abcisse, éloignement, cote) en centimètres :

A(— 2, 2, 6), B(— 2, 2, 0), S(— 2, 1, 8).

Chercher l'ombre portée sur le plan horizontal.

105. — Ombre au soleil d'une droite de profil sur les plans de projection.

Application. On connait une projection d'un point de la droite, trouver l'autre.

106. — Ombre au soleil d'un triangle. Les coordonnées (abcisse, éloignement, cote) des sommets sont, en centimètres :

A (— 2, 4, 5), B (— 4, 0, 2), C (0, 0, 8).

Les rayons lumineux sont horizontaux, dirigés de gauche à droite, d'avant en arrière et inclinés à 45° sur le plan de front. Chercher l'ombre sur le plan de front.

107. — Ombre au flambeau d'un parallélogramme ABCD. La ligne de terre est le petit axe du cadre (180mm sur 240mm); l'origine des abcisses est au centre de la feuille. Unité : mm.

A	$\overline{O\alpha} = 10$	$e = 70$	$c = 50$	
B	$\overline{O\beta} = 50$	$e = 0$	$c = 5$	
C	$\overline{O\gamma} = 60$	$e = 70$	$c = 40$	
Point lumineux. S	$O\sigma = 80$	$e = 110$	$c = 140.$	

108. — Ombre au soleil d'un triangle. Les coordonnées des sommets (abcisse, éloignement, cote) sont, en centimètres,

A (— 4, 0, 4), B (— 6, 4, 7), C (0, 4, 7).

Les rayons lumineux, de gauche à droite, sont dirigés de haut en bas, d'avant en arrière et leurs projections font chacune un angle de 45° avec xy. Chercher l'ombre sur le plan de front.

109. — Ombre au soleil d'un triangle. Les coordonnées des sommets (abcisse, éloignement, cote) sont, en centimètres :

A (— 3, 6, 10), B (— 6, 6, 0), C (0, 6, 0).

Les rayons lumineux sont dirigés comme à l'exercice précédent. Chercher l'ombre portée sur le 1er dièdre de projection.

Droites et plans perpendiculaires.

Exemples de perpendiculaire menée d'un point à un plan :

110. — Le plan est défini par deux droites telles que, sur l'épure, la projection horizontale de chacune et la projection frontale de l'autre sont portées par la même droite.

111. — Le plan est parallèle à xy.

112. — Le plan est défini par xy et un point.

113. — Les traces du plan sont, sur l'épure, portées par la même droite.

114. — Projeter sur un plan $P\alpha Q'$ donné par ses traces un triangle ABC ayant un sommet sur xy, un dans le plan horizontal, un dans le plan frontal de projection.

115. — Mener par un point le plan de bout (ou le plan vertical) perpendiculaire à un plan donné.

116. — On donne une droite et un plan; par leur point d'intersection, mener dans le plan la perpendiculaire à la droite.

117. — Construire le symétrique d'un point A par rapport à un plan donné, ou par rapport à une droite donnée.

118. — Projeter sur un plan donné par ses traces une frontale donnée parallèle au plan.

119. — Mener d'un point la perpendiculaire à une droite de profil.

120. — Déterminer le lieu géométrique des points équidistants de deux points fixes A et B.

Applications. — 1° Trouver sur une droite donnée un point équidistant de deux points donnés A, B.

2° Construire le lieu des points d'un plan P, équidistant de deux points fixes A, B.

121. — Construire le lieu des points équidistants de 3 points fixes A, B, C.

Application. — Trouver sur un plan donné un point équidistant de 3 points donnés A, B, C.

122. — Déterminer le lieu des points équidistants de deux droites concourantes fixes D, Δ.

Applications. — 1° Trouver sur une droite donnée un point équidistant de deux droites concourantes données.

2° Construire le lieu des points d'un plan P équidistants de deux droites concourantes fixes D, Δ.

123. — On donne la projection horizontale d'un angle droit et la projection frontale d'un de ses côtés. Achever l'épure.

Application. — On donne la projection horizontale d'un losange et un plan contenant l'une des diagonales. Trouver la projection frontale.

124. — Soit deux droites D et Δ et leur perpendiculaire commune AB. On donne la projection horizontale de l'ensemble et la projection frontale de D. Achever l'épure.

125. — Par un point donné mener une droite parallèle à un plan donné et orthogonale à une droite donnée.

126. — Mener par un point donné aa' un plan perpendiculaire à un plan donné et parallèle à une droite donnée. Faire l'épure en supposant aa' sur xy, la droite dans le second bissecteur, et le plan donné par ses traces. Construire les traces du plan demandé.

127. — Mener par une droite donnée le plan perpendiculaire au 1er bissecteur.

128. — Caractériser les plans sur lesquels deux droites données AB et CD ont des projections parallèles. Déterminer (sur une épure) celui de ces plans qui passe par une droite donnée Δ.

Application. — Déterminer un plan sur lequel les projections de 4 points donnés A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme.

Méthodes et problèmes généraux.

Changements de plan.

Au moyen d'un *changement de plan frontal* :

129. — Aligner les nouvelles projections frontales de 3 points donnés.

130. — Amener en coïncidence, sur l'épure, les nouvelles traces d'un plan donné.

131. — Rendre parallèles les nouvelles projections frontales de deux droites données.

Au moyen d'un *changement de plan horizontal* :

132. — Rendre de profil une droite donnée.

133. — Rendre une droite donnée parallèle au 2e nouveau bissecteur.

Au moyen de *deux changements de plan* résoudre les problèmes suivants :

134. — Rendre de bout une droite donnée.

135. — Rendre parallèle à x_2y_2 une droite donnée.

136. — Rendre de front un plan donné.

137. — Rendre de profil un plan donné.

138. — Rendre horizontales deux droites données.

139. — Rendre de bout deux plans donnés.

Rotations.

Au moyen d'une rotation autour d'un axe vertical donné, résoudre les problèmes suivants :

140. — Amener un point donné à une distance donnée d'une horizontale fixe donnée.

141. — Amener une droite donnée à rencontrer une verticale fixe donnée, ou une droite de bout fixe donnée.

142. — Amener un plan donné à passer par un point fixe donné, ou amener un point donné dans un plan fixe donné.

143. — Amener les extrémités d'un segment horizontal donné à la même distance d'un point fixe donné.

144. — 1° Amener un plan donné à être parallèle à une droite fixe donnée.

2° Amener une droite à être parallèle à un plan fixe donné par ses droites principales.

145. — Déterminer une rotation d'axe vertical qui amène en coïncidence deux droites de même pente (l'une, bien entendu, restant fixe (*G. cotée*).

146. — Au moyen d'une rotation amener les nouvelles traces frontales de deux plans à être parallèles.

Au moyen de deux rotations, résoudre les problèmes suivants :

147. — Rendre parallèle à xy une droite donnée.

148. — Rendre de front un plan donné.

149. — Rendre de profil un plan donné.

Rabattements.

150. — On rabat un plan sur le plan horizontal de projection; on donne, soit la projection cotée d'un point du plan et son rabattement, soit les projections mm' d'un point du plan et son rabattement. Déterminer la charnière.

151. — On donne la trace horizontale αP d'un plan et le rabattement αQ_1 de la trace frontale sur le plan horizontal de projection. Relever cette trace.

152. — Dans le rabattement d'un plan sur un plan horizontal, on donne la charnière, le rabattement d'un point M et une des projections de ce point. Trouver l'autre.

153. — Sur une horizontale donnée d'un plan, trouver le point équidistant de deux points donnés A et B de ce plan.

154. — Unité : cm. Représenter un hexagone régulier tracé dans un plan de pente 0,4 connaissant le côté a_3b_5 dont la longueur est 5^{cm} (*G. cotée*).

155. — Soit un triangle ABC ayant un côté horizontal AB. Construire un point du plan de ce triangle connaissant ses distances aux côtés AB et AC. — On donne les sommets soit par leurs projections (horizontale et frontale), soit par leurs projections cotées.

156. — Soit un triangle équilatéral ABC dont le plan est donné par son échelle de pente; on donne les projections de deux sommets; achever la représentation du triangle (*G. cotée*).

157. — Même question pour un carré dont on donne deux sommets, soit consécutifs, soit opposés.

158. — Dans un plan défini par une horizontale et un point O, construire un triangle équilatéral (ou un carré, ou un pentagone régulier) ayant O pour centre, connaissant la projection horizontale d'un sommet.

159. — On donne un plan par ses traces $P\alpha Q'$ et un point A sur la trace frontale. Joindre le point A à un point B de la trace horizontale de façon que le triangle αAB ait une aire donnée.

160. — Construire un triangle équilatéral dont un sommet A est donné sur xy, le côté BC étant porté par une horizontale donnée.

Projection du cercle.

161. — Dans un plan défini par ses lignes principales OH, OF, on donne un cercle de centre O et de rayon R. Trouver les points d'intersection de ce cercle et d'un plan défini par xy et un point A.

Représenter les cercles circonscrit et inscrit à un triangle ABC:

162. — Le triangle abc est équilatéral, de côté 5^{cm}, et on cote : $a_6b_4c_7$ (unité : cm.).

163. — On place A dans le plan horizontal, B dans le plan frontal de projection; C est quelconque.

164. — Un cercle situé dans un plan de bout est défini par son diamètre de front. Construire les points de ce cercle qui sont dans un plan donné; qui sont à une distance donnée d'un plan donné.

165. — Par deux droites parallèles D et Δ, faire passer respectivement deux plans perpendiculaires qui coupent xy en un même point (non donné). — On pourra rendre D et Δ de bout au moyen d'un changement de plan.

166. — Par deux points donnés A, B faire passer un cercle tangent à une frontale donnée. (La droite et les deux points sont, bien entendu, dans un même plan).

167. — Par un point A donné dans le plan d'un cercle O, lui mener 1° une tangente; 2° une sécante sur laquelle il découpe une corde de

longueur donnée. — On définira le plan du cercle par le point A et l'horizontale passant par le centre; on déterminera le cercle par son centre et son rayon.

Distances.

168. — Mener un segment de longueur donnée, dont une extrémité est donnée et dont l'autre doit être sur une horizontale donnée.

169. — On donne la distance de deux points, les projections de l'un d'eux, une projection de l'autre; construire l'autre projection.

170. — La trace horizontale A d'une droite a pour éloignement $+20^{mm}$, sa trace frontale B a pour cote $+30^{mm}$; le segment AB mesure 50^{mm}. Construire l'épure de la droite.

Exemples de distance d'un point à un plan :

171. — Le plan a, sur l'épure, ses traces confondues.

172. — Le plan est défini par xy et un point.

173. — Chaque projection du point est sur la trace de même nom du plan.

174. — Mener par une horizontale donnée un plan qui soit à une distance connue d'un point donné.

Distance de deux plans parallèles :

175. — Donnés par leurs échelles de pente.

176. — Donnés par leurs droites principales.

Problèmes inverses. — Mener à un plan donné P un plan parallèle à une distance donnée :

177. — Le plan P est défini par son échelle de pente.

178. — Le plan P est défini par ses droites principales.

APPLICATION. — Trouver sur une droite donnée un point dont on connaît la distance à un plan donné (*Desc. et cotée*).

179. — Par deux points donnés A et B et une droite donnée CD, faire passer trois plans parallèles, le plan issu de CD étant à égale distance des deux autres.

180. — On connaît la distance d'un plan P à un point A.

1° Le point A étant donné sur xy, déterminer le plan connaissant sa trace horizontale.

2° Le plan étant donné, déterminer la cote du point (ou sa projection frontale) connaissant sa projection horizontale.

181. — On connaît la distance de deux plans parallèles et leurs traces frontales. Achever de les déterminer sur l'épure.

Exemples de distance d'un point à une droite :

182. — La droite est contenue dans le plan frontal de projection.

183. — La droite est parallèle à xy.

184. — La droite est de profil.

185. — Par deux points A et B d'un plan, tracer dans ce plan deux droites parallèles connaissant leur distance.

186. — Construire un point d'un plan défini par ses traces connaissant:

1° Soit ses distances aux traces du plan;

2° Soit ses distances à deux points du plan donnés par leurs projections horizontales.

187. — Construire un vecteur CD équipollent à un vecteur donné AB, les points C et D étant respectivement sur un plan P et sur une droite Δ donnés.

188. — On donne un plan par son échelle de pente, et la projection c d'un point A; trouver sa cote connaissant sa distance au plan.

Perpendiculaire commune à deux droites :

189. — Les deux droites ont leurs projections horizontales parallèles.

190. — L'une des droites est xy, l'autre est de profil.

191. — L'une des droites est xy, l'autre est quelconque.

192. — L'une des droites est horizontale ou de front, l'autre est quelconque.

193. — Les deux droites sont parallèles au 2ᵉ bissecteur.

194. — Mener par un point donné une droite de pente donnée, et passant à une distance connue d'une verticale donnée.

195. — Mener par un point donné une droite s'appuyant sur une droite donnée, et passant à une distance connue d'une verticale donnée.

196. — On connaît les distances d'une verticale à une autre verticale donnée V et à une droite donnée D. Construire cette verticale.

197. — On connaît la distance de deux droites. Sur l'épure est représentée l'une des droites et le pied, sur elle, de la perpendiculaire commune; on donne en outre une des projections de la deuxième droite. Trouver l'autre.

198. — Mener une droite de direction donnée s'appuyant sur une droite donnée et sur laquelle les plans de projection découpent un segment de longueur donnée.

199. — Construire un triangle rectangle isocèle connaissant l'hypoténuse b_2c_3 et la cote 5 du sommet A.

Angles.

Angle de deux droites :

200. — L'une est verticale.

201. — L'une est de profil.

202. — Chaque projection de l'une coïncide avec la projection de nom contraire de l'autre.

203. — On connaît l'angle $P\alpha Q'$ (de l'espace) des traces d'un plan. $\alpha Q'$ étant tracée sur l'épure, construire αP.

204. — Un triangle équilatéral aBC est donné dans le plan horizontal de projection. Ce triangle est la projection orthogonale d'un triangle isocèle ABC, dont le sommet A se projette en a et dont l'angle au sommet est égal à un demi-droit.

Indiquer les constructions qui permettent de déterminer la cote du point A et l'angle du plan du triangle ABC avec le plan horizontal.

(*Bacc. Strasbourg*.).

205. — On donne la projection horizontale bac d'un angle BAC de grandeur connue (les points B et C ont pour cote zéro). Graduer les côtés de l'angle (*G. cotée*) ou trouver sa projection frontale (*G. descriptive*.)

206. — On donne dans le plan de projection, un triangle abc, le côté $bc = 4$ unités, l'angle bac est de 120 degrés, et les deux côtés ab et ac sont égaux.

Ce triangle est la projection d'un triangle bAc ayant deux sommets b et c dans le plan de projection; l'angle bAc est droit.

Calculer la cote de A, et la pente du plan bAc. *(Bacc. Poitiers.)*

207. — On donne la projection horizontale d'un angle BAC de grandeur connue dont un côté b_0c_0 est horizontal; coter la projection.

208. — On connaît l'angle θ que fait une droite Δ d'un plan avec une horizontale D de ce plan. Connaissant les projections horizontales δ et d de ces droites, achever de déterminer le plan,

soit par son échelle de pente *(G. cotée)*.

soit par une frontale *(G. descriptive)*.

Mener par un point A une droite coupant une droite donnée D sous un angle connu :

209. — La droite donnée est horizontale, ou de front, ou parallèle à xy.

210. — La droite donnée est de bout;

211. — La droite donnée est de profil.

212. — Mener une droite parallèle à un plan donné (ou orthogonale à une droite donnée) et coupant deux droites données sous le même angle.

213. — On donne dans le plan H trois points a, b, c formant un triangle équilatéral de 6^{cm} de côté : ce sont les projections de 3 points A, B, C de l'espace formant un triangle isocèle rectangle en A. La cote de A est 6^{cm}.

1° Montrer que AB, AC ont la même pente et que le milieu de BC a aussi pour cote 6.

2° Trouver les cotes de B et C et la pente du plan du triangle. *(Bacc. Poitiers.)*

214. — Un cône de révolution a pour sommet un point S, pour axe une frontale SD du plan horizontal de comparaison, pour demi-angle au sommet un angle θ. Déterminer la génératrice sur laquelle les plans de comparaison découpent un segment SA de longueur donnée.

Angle d'une droite et d'un plan :

215. — Le plan est vertical, la droite est quelconque.

216. — Le plan est donné par ses droites principales, la droite est horizontale.

217. — La droite a ses projections symétriques par rapport à xy, le plan est le 2e bissecteur.

218. — La droite a ses projections confondues, le plan est le 1er bissecteur.

219. — La droite est xy, le plan est donné par ses droites principales.

220. — Le plan est donné par son échelle de pente, la droite est verticale *(G. cotée)*.

221. — Une projection de la droite est perpendiculaire à la trace de même nom du plan.

222. — Le plan a, sur l'épure, ses traces confondues; la droite est horizontale.

223. — On donne la projection horizontale d'une droite et la projection frontale d'un de ses points. Achever de représenter la droite connaissant l'angle qu'elle fait soit avec le plan frontal, soit avec le plan horizontal de projection.

224. — Dans un plan donné par ses traces $P\alpha Q'$, mener par α une droite faisant un angle donné θ avec xy.

Mener par une droite donnée D d'un plan P une droite faisant avec ce plan un angle connu θ :

225. — La droite D est une horizontale du plan P.

226. — Le plan P est vertical, la droite est quelconque.

227. — Les données sont quelconques, le plan étant défini par son échelle de pente.

228. — Un angle AMB se projette sur le plan horizontal suivant un angle droit et ses côtés font avec ce plan un même angle α. Construire sa vraie grandeur et l'angle de son plan avec le plan horizontal. *(Bacc. Clermont.)*

229. — Mener par une droite D un plan faisant le plus grand angle possible avec une droite Δ.

Angle de deux plans P et R :

230. — L'un est vertical, l'autre est quelconque.

231. — L'un est de profil, l'autre est quelconque.

232. — L'un est le plan vertical, l'autre le plan de bout issus d'une droite donnée D.

233. — On donne l'intersection qui est de profil et les traces horizontales.

234. — On donne l'intersection, un point de l'un, une trace de l'autre.

235. — Les deux plans ont leurs horizontales parallèles.

236. — Les deux plans ont leurs traces frontales parallèles.

237. — Pour chaque plan, les traces sont portées, sur l'épure, par la même droite.

238. — Connaissant les angles aigus $a = P\alpha y$, $\nu = Q'\alpha y$ des traces d'un plan $P\alpha Q'$ avec xy, déterminer les éléments du trièdre $\alpha.PQy$. Montrer en particulier que :
$$\cos \widehat{P\alpha Q'} = \cos a . \cos \nu.$$

239. — Construire un plan connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait, soit avec le plan horizontal, soit avec le plan frontal de projection.

240. — Deux plans ont leurs échelles de pentes parallèles; calculer leur angle. [Utiliser la formule qui donne $\mathrm{tg}(a + b)$].

241. — Mener par une droite donnée un plan faisant des angles égaux avec deux plans donnés.

242. — Mener par une droite donné un plan dont on connaît l'angle θ avec le plan horizontal.

243. — Construire les bissecteurs des dièdres formés par un plan et les plans de projection; chercher ensuite leur intersection. Que constate-t-on? Cas particulier où le plan est parallèle à xy.

244. — Construire une droite faisant des angles donnés avec le plan horizontal et avec la ligne de terre.

245. — Construire, dans un plan donné, une droite faisant un angle donné avec le plan frontal de projection (On se donnera le plan par une frontale et un point).

246. — Construire l'angle du premier bissecteur et d'un plan vertical dont la trace fait 45° avec xy. — Évaluer cet angle.

247. — Un trièdre a une face de 10° et deux faces de 45°. Construire et évaluer le rectiligne du dièdre opposé à la plus grande face.

Construire un **triangle** isocèle ABC (AB = AC) :

248. — On donne les sommets B et C, la hauteur (en grandeur) issue de A et un plan contenant le sommet A.

249. — On donne les sommets B et C, la longueur AB = AC = *l*, et un plan issu de B contenant le sommet A.

250. — Construire un trièdre connaissant deux *faces*, dont l'une est donnée dans le plan horizontal, et le dièdre compris. — Déterminer les éléments inconnus.

251. — Construire un trièdre connaissant une face, donnée dans le plan horizontal, et les dièdres adjacents. — Déterminer les éléments inconnus.

252. — Construire un trièdre connaissant deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux (Prendre comme plan horizontal le plan de la face, non donnée, adjacente aux dièdres donnés).

Polyèdres. Sphère.

Représenter un **tétraèdre régulier** :

253. — On donne le plan de base (défini par une échelle de pente) et deux sommets situés dans ce plan.

254. — On donne une arête verticale SA (*G. cotée*).

255. — On donne un sommet A sur *xy*, et on sait que l'arête BC est sur une horizontale donnée.

256. — On donne une arête AB (en grandeur et position) et la projection horizontale de la droite AC (Le sommet S est au-dessus du plan ABC).

On donne la base ABC, située dans le plan horizontal d'un tétraèdre SABC. Représenter ce tétraèdre :

257. — Sachant que le trièdre de sommet S est trirectangle;

258. — Connaissant les longueurs des 3 arêtes issues de S,

259. — Connaissant les dièdres d'arêtes BC, CA, AB;

260. — Connaissant la projection *s* du sommet et sachant que le dièdre SA est droit

261. — Représenter un tétraèdre SABC dont le trièdre S est trirectangle; on sait de plus que la face ABC est horizontale, et on donne, en projection horizontale, le segment *sa* et les droites portant *sb* et *sc*.

Même question lorsqu'on se donne la projection cotée du sommet et les projections horizontales, non graduées des droites portant les arêtes.

262. — On considère un plan de bout P*x*Q'. Un triangle ABC situé dans ce plan se projette horizontalement suivant un triangle équilatéral de côté *l*. L'un des côtés AB du triangle ABC est de bout. Le triangle ABC est la base d'un tétraèdre SABC, dont la face SAB est un triangle équilatéral situé dans le plan de profil de AB.

Tracer les projections du tétraèdre SABC. (*Bacc. Marseille.*)

263. — Représenter une pyramide hexagonale régulière connaissant le côté de base AB = 3^{cm}, et la hauteur, 12^{cm}. La pyramide repose par un triangle latéral SAB sur le plan horizontal, l'arête SA étant parallèle à *xy*. (A est plus près que B de *xy*.)

264. — Représenter une pyramide quadrangulaire régulière; on connaît le centre et un sommet de la base, qui est de bout, et la longueur des arêtes latérales.

265. — On donne une pyramide ayant pour base un carré ABCD de côté 4*a* dans le plan de comparaison et pour sommet un point S de cote 6*a* se projetant à l'intérieur du carré à une distance *a* des deux côtés issus de A. Déterminer la vraie grandeur des faces latérales et les angles qu'elles font avec le plan horizontal.

Représenter un **cube** :

266. — Une des faces est dans le plan horizontal, une autre est de front.

267. — Un plan diagonal est de front; une arête est horizontale.

268. — Un plan diagonal est de front, une diagonale est verticale.

269. — On donne deux sommets A, C, non consécutifs d'une face et un plan P contenant la diagonale issue du sommet A. (P est défini, par exemple, par le point A et une horizontale H).

270. — Un cube a une diagonale verticale. On enlève du cube la partie située au-dessous du plan perpendiculaire au milieu de cette diagonale. Représenter le solide restant.

Représenter un **parallélépipède** :

271. — On donne, par leurs projections, les 3 arêtes (segments) issues d'un sommet.

272. — On donne, par leurs projections, les droites portant 3 arêtes non situées (deux à deux) dans un même plan.

273. — Le parallélépipède est droit. On donne les projections d'une base et la hauteur.

274. — Dans un plan défini par les points A, M, C, on considère le carré de diagonale AC. Représenter l'octaèdre régulier formé par deux pyramides accolées suivant ce carré.

275. — Tas de sable. On donne dans le plan de comparaison un rectangle ayant pour côtés 5^{m} et 8^{m}; de chaque côté partent les plans faisant avec ce rectangle des angles de 60^{gr}; la hauteur du tas est 2^{m}. Représenter le solide obtenu; couper par des plans horizontaux équidistants de 40^{cm}. (Échelle 1/100.)

276. — Une pyramide régulière à base carrée repose (par la base) sur le plan horizontal. Par le milieu de la hauteur on mène le plan parallèle au 2e bissecteur et on enlève la partie de la pyramide située au-dessus du plan de section. Représenter le solide restant.

277. — On donne un tétraèdre par ses 4 sommets. Chercher les points d'intersection avec la parallèle à *xy* issue du point commun aux droites joignant les milieux de deux arêtes opposées.

278. — Tas de sable.

Cadre de 18^{cm} sur 24. O est au centre de la feuille, O*x* porté par le petit axe vers la droite, O*y* par le grand axe vers le bas. Unité : m. Échelle 0,02.

Sur un sol supposé plan, de pente $\frac{1}{3}$, dont l'horizontale de cote 8,00 se projette sur O*y*, repose un tas de sable. La face supérieure est un rectangle horizontal ABCD, de cote 10. A se projette en *a* ($x = 0$, $y = 0$) et B en *b* ($x = -0,5$, $y = 1,7$); les côtés AD et BC valent 2^{m},50 et sont dirigés vers la droite. Les faces latérales ont pour pente 1,25. Représenter le tas de sable, et figurer la section par le plan vertical mené par le centre du rectangle ABCD perpendiculairement au sol.

279. — Une pyramide SABC a pour base un triangle ABC situé dans la partie avant du plan horizontal. AB est parallèle à xy et C est en avant de AB. On donne (unité : mm.)

$$AB = AC = 116, \qquad BC = 147; \qquad SA = SB = SC = 104.$$

1° Représenter la pyramide.

2° Représenter la section faite par un plan perpendiculaire à SA, mené par le point de cette arête situé au quart de sa longueur à partir du sommet S. (*Saint-Cyr, partiel.*)

280. — Représenter un cube ABCDEFGH. Le sommet A est défini par (unité : cm.) : abscisse = 1, éloignement = — 0,5; cote = 23; le sommet B par abs. = — 6, él. = 4,5, cote = 19. Le sommet C est dans le plan de cote 12 : on prendra des deux sommets possibles celui qui a le plus grand éloignement. L'arête CG, perpendiculaire à la face ABCD, est tout entière au-dessus du plan de cote 12. (*Saint-Cyr, partiel.*)

Ombres.

281. — Ombre portée par un polyèdre sur un plan. — Ombre propre. — On cherche l'ombre des diverses arêtes; certains des segments obtenus forment un polygone à l'intérieur duquel sont tous les autres; ce polygone constitue **le contour de l'ombre portée**. Les arêtes dont il est l'ombre forment dans l'espace le **contour d'ombre propre** du polyèdre; ce contour sépare la surface du polyèdre en deux régions, l'une éclairée, l'autre dans l'ombre. On les distingue en considérant un rayon lumineux qui « traverse » le polyèdre : le point d'entrée est éclairé, les autres points d'intersection (qui se réduisent à un, dans le cas d'un polyèdre convexe) sont dans l'ombre.

282. — Ombre au soleil d'un tronc de prisme triangulaire. (Les plans de proj. sont opaques). Cadre de 180 sur 240. — Unité *mm.* — La ligne de terre est le petit axe. Les abscisses sont rapportées au milieu O de la ligne de terre. Le tronc repose par une section droite ABC, sur le plan horizontal :

A abscisse :	— 50	éloig. : 100	arête AD = 20
B	— 70	52	arête BE = 34
C	— 7	20	arête CF = 88.

Rayons lumineux : leurs projections font l'une et l'autre 45° avec la ligne de terre; de gauche à droite ils sont dirigés de haut en bas et d'avant en arrière.

283. — Ombre au flambeau d'un cube (*G. Cotée*).

Cadre de 18^{cm} sur 24. O est au centre de la feuille, Ox dirigé suivant le grand axe vers la droite, Oy suivant le petit axe vers le bas; z est la cote. — Unité *cm.*

Un cube ABCDEFGH d'arête 3,5 repose sur un plan faisant 30° avec le plan horizontal dont l'échelle de pente est parallèle à Ox (les cotes croissent de gauche à droite). Un des sommets de la base ABCD a pour coordonnées

$$A\,(x = -5,4 \qquad y = 4,8 \qquad z = 7).$$

Le sommet C opposé à A a pour cote 9 et sa projection est plus près de Ox que celle de A. Le point lumineux est sur le prolongement de l'arête AE et sa cote est $z = 20$.

Représenter le cube et l'ombre qu'il porte sur le plan de projection.

Si on a besoin d'une projection auxiliaire, on prendra la ligne de terre parallèle au grand axe, à 2^{cm} au dessus.

284. — Ombre au flambeau d'un prisme hexagonal régulier (*G. cotée*). Le plan de base a pour pente 1,25; le centre O de la base inférieure a pour cote 4^{cm} et un des côtés, horizontal, a pour cote 2^{cm}; les arêtes latérales mesurent 8^{cm}. Chercher l'ombre au flambeau (ombre propre et ombre portée sur le plan horizontal), le point lumineux ayant pour cote 20^{cm} et se projetant au centre de la base inférieure. (Cadre de 18^{cm} sur 24. On placera O_1 à 3^{cm} du bord de gauche, sur le grand axe; les horizontales du plan de base sont parallèles au petit axe, les cotes croissant de gauche à droite.)

Sphère.

285. — Déterminer la sphère (centre et rayon) circonscrite à un tétraèdre ABCD ayant une face BCD dans le plan horizontal.

286. — Construire les contours apparents d'une sphère de rayon donné passant par un cercle situé dans un plan de bout et défini par son diamètre de front.

287. — Par une droite donnée, mener un plan coupant un dièdre donné suivant un angle droit. — Faire l'épure dans le cas où une face du dièdre donné est dans un des plans de projection.

288. — Déterminer la **sphère inscrite** à un tétraèdre ayant une face BCD dans le plan horizontal.

Le centre est commun aux bissecteurs des dièdres BC, CD, DB.

Une autre construction est fondée sur la remarque suivante : si on rabat sur le plan horizontal les faces issues de A de façon qu'elles recouvrent la base BCD, le centre du cercle passant par les rabattements A_1, A_2, A_3, du sommet A, se confond avec la projection du centre de la sphère inscrite.

289. — Étant donné deux points A, B et une droite D, trouver sur D un point d'où on voie le segment AB sous un angle droit.

290. — Intersection du second bissecteur et d'une sphère dont les contours apparents sont confondus.

291. — Déterminer le grand cercle d'une sphère dont le plan passe par une horizontale, ou une droite de front donnée.

292. — Étant donné un miroir sphérique défini par son centre O et un point I construire le rayon réfléchi d'un rayon incident donné AI.

293. — Construire une sphère connaissant deux tangentes et leurs points de contact. Faire l'épure en se donnant une tangente de bout et une tangente verticale.

294. — A une sphère donnée mener une tangente dont on donne la projection horizontale et la pente (*G. cotée.*)

295. — Construire un vecteur CD équipollent à un vecteur donné AB, les points C et D devant être respectivement sur une sphère et sur une droite données.

296. — Mener par un point donné une droite s'appuyant sur une droite donnée et passant à une distance connue d'un point donné.

297. — Au moyen d'une rotation autour d'un axe donné dans un plan de bout, amener un segment AB de ce plan à être vu sous un angle droit d'un point fixe M donné dans le plan horizontal.

298. — Par deux points A et B pris sur une sphère donnée, faire passer

un plan qui la coupe suivant un cercle circonscrit à un carré de côté AB.

299. — Par un cercle donné dans le plan frontal, faire passer une sphère tangente au plan horizontal.

300. — Même question pour un cercle donné dans un plan quelconque défini, par exemple, par sa trace horizontale et le centre du cercle.

301. — Une sphère de 5^{cm} de rayon est tangente aux deux plans de projection. Chercher ses points d'intersection avec une droite dont les projections rencontrent xy au même point, font avec xy un angle de 50^{gr} et sont chacune à 2^{cm} de la projection de même nom du centre de la sphère. Trouver ensuite les traces du plan tangent en l'un des points d'intersection.

(*Bacc. Marseille.*)

302. — Mener par une droite un plan qui coupe une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

303. — Construire une sphère passant par un point donné et tangente à deux verticales données.

304. — **Ombre d'une sphère.** — On l'obtient en considérant soit le cône circonscrit ayant pour sommet la source lumineuse (ombre au flambeau), soit le cylindre circonscrit parallèlement aux rayons lumineux (ombre au soleil). Le contour d'ombre propre est le cercle de contact du cône ou du cylindre circonscrit.

Construire l'ombre au flambeau d'une sphère et l'ombre portée sur le plan horizontal. On supposera le point lumineux S situé dans le plan tangent au point le plus haut A de la sphère. Prendre une sphère de centre o_6 de rayon 2 (unité : cm) et AS = 5 ; placer a et o sur le grand axe de la feuille, a à 1 du bord de gauche.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE II. — FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

ÉTUDE DES FIGURES ÉLÉMENTAIRES PAR LA MÉTHODE DES DEUX PROJECTIONS

LIVRE I. — LES FIGURES ÉLÉMENTAIRES

LIVRE II. — FIGURES ÉLÉMENTAIRES COMBINÉES

LIVRE III. — MÉTHODES ET PROBLÈMES GÉNÉRAUX

(Géométrie cotée et géométrie descriptive.)

LIVRE IV. — PROBLÈMES SIMPLES SUR QUELQUES SOLIDES USUELS

(*Géométrie cotée et géométrie descriptive.*)

17767. — BRODARD ET TAUPIN, Paris (France). — 9-32.

Contes et Nouvelles, par Alfred de MUSSET.
Cinq des meilleurs contes du charmant écrivain.

Le Temps des Cerises, par Clovis HUGUES.
Roman d'amour chaste qui trouvera surtout sa place dans la bibliothèque des jeunes filles.

Les Fiancés, par Alexandre MANZONI.
Ce livre est d'une lecture attachante et saine. Le chef-d'œuvre de la littérature italienne.

Amaryllis, par G. DROSINIS *(traduit du grec moderne)*
C'est le récit d'une charmante idylle qui a pour cadre les environs d'Athènes. Tout y est gracieux.

Le Capitaine Fracasse, par Th. GAUTIER (2 vol.)
Livre plein de mouvement, d'imprévu, de pittoresque.

Le Roman de la Momie, par Th. GAUTIER.
Nous pénétrons dans la sépulture royale, où la Princesse Tahoser, nous livrera l'histoire de sa vie.

Avatar. Jettatura, par Th GAUTIER.
Dans *Avatar*, TH. GAUTIER imagine qu'un savant, versé dans les mystères de l'Inde, parvient à opérer un échange d'âmes entre deux personnages.
Jettatura, montre l'influence néfaste d'un jeune homme qui a le *mauvais œil*.

Histoires extraordinaires, par Edgar POË.
Traduction de Ch. BAUDELAIRE
Ces Histoires plairont par leur originalité.

Une Etude en Rouge, par Sir Arthur CONAN DOYLE.
Le personnage à une faculté d'observation extraordinaire.

Les Derniers Jours de Pompéi, par E. BULWER. LYTTON.
Évocation saisissante de la vie des habitants de Pompéi au moment de sa destruction.

Norine. Mlle Abeille, par Ferdinand FABRE.
Deux récits ravissants de couleur locale, de naïveté.

Jean de La Fontaine, par BRUNEL et MORLINS,
Le roman de ses jeunes années.

A travers l'Histoire de France, par J. MICHELET.
Les meilleurs morceaux du grand écrivain.

Le Grillon du Foyer. Le Naufrage. Cantique de Noël, par Ch. DICKENS.
Trois contes justement célèbres.

Les Aventures de Monsieur Pickwick, par Ch. DICKENS.
Le plus amusant des livres de Dickens.

Nicolas Nickleby, par Ch. DICKENS.
Livre très émouvant et rempli de pittoresque.

Les Chouans, par Honoré de BALZAC.
BALZAC s'y montre déjà maître dans l'art de peindre les sentiments de ses personnages.

Pierrette, par Honoré de BALZAC.
Aventure mélancolique. Mais ne convient-il pas de montrer à la jeunesse, de temps à autre, que la vie a ses épines si elle ne manque pas de roses !

Le Colonel Chabert. Adieu. La Grenadière, par Honoré de BALZAC.
Trois nouvelles d'un très grand intérêt dramatique.

Colomba. Matéo Falcone, par P. MÉRIMÉE.
Deux nouvelles, chefs-d'œuvre du genre.

Contes choisis de Boccace.
Trente morceaux qui peuvent être lus par la jeunesse.

La Vie des Araignées, par J.- H. FABRE.
Volume extrait des "*Souvenirs Entomologiques*".

L'Homme de neige, par George SAND (2 vol.)
Le héros principal nous conduit d'Italie en Suède à travers la France et l'Allemagne et nous fait témoin d'aventures passionnantes.

François le Champi, par George SAND.

La mare au diable, par George SAND.

La Petite Fadette, par George SAND.